Гл. I. Основные понятия. Простейшие типы ДУ.

3.2 ОДУ в дифференциалах (в симметричной форме).

$$P(x,\, y)dx + Q(x,\, y)dy = 0 \qquad (3.3)$$

Замечание 3.4. $(P(x,\, y))^2 + (Q(x,\, y))^2 \neq 0$.

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,\, y)}{Q(x,\, y)} = f(x,\, y)$$

или

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x,\, y)}{P(x,\, y)} = \frac{1}{f(x,\, y)}.$$

3.2.a) $P(x,y) = M_1(x)N_1(y)$**,** $Q(x,y) = M_2(x)N_2(y)$**.**

В этом случае ОДУ (3.3) - ОДУ с разделяющимися переменными.

К нормальному виду его приводить нет необходимости, достаточно

✍ при $M_2(x) \neq 0$ и $N_1(y) \neq 0$ разделить на $M_2(x)N_1(y)$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

И проинтегрировать.

✍ $M_2(x) = 0$ и $N_1(y) = 0$ могут давать решения.

Пример 3.2. Решить уравнение $(x^2 - 1)ydx = x(x^2 + 1)dy$.

☐ $P(x,y) = (x^2 - 1)y = M_1(x)N_1(y)$, $M_1(x) = x^2 - 1$, $N_1(y) = y$.

$Q(x,y) = -x(x^2 + 1) = M_2(x)N_2(y)$, $M_2(x) = -x(x^2 + 1)$, $N_2(y) = 1$.

❶ При $M_2(x) = -x(x^2 + 1) \neq 0$, $N_1(y) = y \neq 0$

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}dx = \frac{dy}{y}.$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим дробь в левой части на простейшие:

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему

$$\begin{cases} a+b=1, \\ c=0, \\ a=-1, \end{cases}$$

из которой находим

$\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}=\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x}$, т.е.

$$\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, получим

$\ln(x^2+1)-\ln|x|=\ln|y|+C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$,

или

$|y|=C_2\dfrac{x^2+1}{|x|}$, $C_2>0$ [1].

Раскрывая модули

$y=C_3\dfrac{x^2+1}{x}$, $C_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

❷ $M_2(x)=-x(x^2+1)=0$

$x=0$ - решение.

❸ $N_1(y)=y=0$

$y=0$ - решение.

Ответ: $y=C\dfrac{x^2+1}{x}$, $C \in \mathbb{R}$,

$x=0$.

■

3.2.б) ДУ в полных дифференциалах.

Определение. ОДУ (3.3) называется уравнением в полных дифференциалах, если левая часть ОДУ (3.3) представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U=U(x, y)$ в G:

$$Pdx+Qdy \equiv dU=U_x dx+U_y dy.$$

Т.е.

$$P=U_x,\ Q=U_y \tag{3.4}$$

и $dU=0$, следовательно, $U(x, y)=C$, $C=const$, - решение.

Теорема 3.1. (Критерий ДУ в полных дифференциалах)

Пусть $P(x, y)\in C(G)$, $Q(x, y)\in C(G)$ и $P_y \in C(G)$, $Q_x \in C(G)$,

$G=\{(x, y): a<x<b, c<y<d\}$,

---

[1] $C_1=-\ln C_2$

$P^2 + Q^2 \neq 0$ в G.
Тогда в G существует функция $U(x,\ y)$ такая, что
$dU = Pdx + Qdy \;\Leftrightarrow\; P_y = Q_x$ в G.

○ ⇨ (необходимость)

Пусть существует $U(x,\ y)$:
$dU = Pdx + Qdy$,
т.е.
$P = U_x$, $Q = U_y$.
$P_y = (U_x)_y$, $Q_x = (U_y)_x$
- непрерывны по условию, следовательно
$U_{xy} = U_{yx}$ (из математического анализа).
➔

⇦ (достаточность)

$P_y = Q_x$.

<u>Задача</u>: найти $U = U(x,\ y)$: $U_x = P$, $U_y = Q$,
P, Q - непрерывны ($P_y \in C(G), Q_x \in C(G)$), т.е.
$dU = Pdx + Qdy$.

Рассмотрим $U_x = P(x,\ y)$.
Интегрируя[2], получаем

$$U(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi,\ y)\,d\xi + g(y),$$ [3]

где $g(y)$ - произвольная функция переменной y, которая получается при фиксированном y как константа при интегрировании по переменной x.
Теперь покажем, что существует $g(y)$: $P_y = Q_x$.

$$Q(x,\ y) = U_y \;=\; \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x_0}^{x} P(\xi,\ y)\,d\xi + g(y)\right] \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(\xi,\ y)}{\partial y}\,d\xi + g'(y) \;=\; \left|\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right| \;=$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(\xi,\ y)}{\partial \xi}\,d\xi + g'(y) = Q(x,\ y) - Q(x_0,\ y) + g'(y),$$

следовательно
$g'(y) = Q(x_0,\ y)$,
и

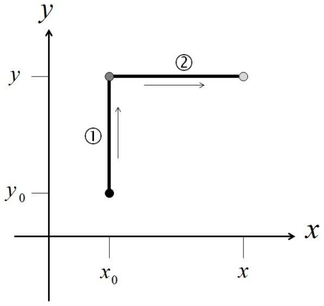
$$g(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ \eta)\,d\eta + C.$$

Итак

$$U(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi,\ y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ \eta)\,d\eta + C$$ - найдено.

---

[2] Бесов. Лекции по МА. Ч. 1. Гл.14, §14.4. Теорема 3.
[3] Бесов. Лекции по МА. Ч. 1. Гл.9, §9.1. Определение первообразной.
§14.4. Теорема 2 (теорема Барроу).



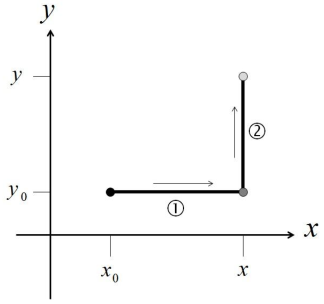
①

$$\int_{y_0}^{y} Q(x_0,\eta)\,d\eta$$

②

$$\int_{x_0}^{x} P(\xi,\,y)\,d\xi$$

Можно



①

$$\int_{x_0}^{x} P(\xi,\,y_0)\,d\xi$$

②

$$\int_{y_0}^{y} Q(x,\eta)\,d\eta$$

Показаны два пути.

Результат не зависит от пути интегрирования.[4]

🡐

●

Замечание 3.5. Так как G - прямоугольник, то за пределы G не выходим.

Полезный совет: использовать формулы $d(x\cdot y)=ydx+xdy$,

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2},$$

$$d\left(y^a\right)=ay^{a-1}dy,$$

$$d(\ln y)=\frac{dy}{y}$$

и т.д.

Пример 3.3. Решить уравнение $\left(2x+y^3\right)dx+3xy^2dy=0$.[5]

☐ ☹ Переменные не разделяются.

$P=2x+y^3$, $Q=3xy^2$,

$P_y=3y^2$, $Q_x=3y^2$,

т.е. $P_y=Q_x$ - ОДУ в полных дифференциалах.☺

$U_x=P=2x+y^3$ → $U=x^2+xy^3+g(y)$.

$U_y=3xy^2+g'(y)=Q=3xy^2$ → $g'(y)=0$ → $g(y)=c$.

$U=x^2+xy^3+c$.

Ответ: $x^2+xy^3=C$.

■

---

[4] Бесов. Лекции по МА. Ч. 1. Гл.20, §20.5Теорема 1.

[5] С§4.8

3.2.в) Интегрирующий множитель.

Рассмотрим случай, когда ОДУ (3.3)
☹ не является уравнением в полных дифференциалах
☹ и переменные не разделяются.

Определение. Функция $\mu(x,\ y)$, определенная в G называется интегрирующим множителем ОДУ (3.3), если

- $\mu \neq 0$ в G,
- в G существует функция $U = U(x,\ y)$: $dU = \mu P dx + \mu Q dy$.

Тогда
$U_x = \mu P$, $U_y = \mu Q$.
И по **теореме 3.1**
$U_{xy} = (\mu P)_y = (\mu Q)_x = U_{yx}$.
Т.о.,
$$\mu(P_y - Q_x) = Q\mu_x - P\mu_y. \tag{3.5}$$
А это уже ДУ в ЧП (дифференциальное уравнение в частных производных), решение которого в общем случае задача не простая.[6]

Нам достаточно знать одно частное решение (3.5). Иногда его удается угадать.

Если $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$, то найти частное решение (3.5) задача посильная.

Пример 2.4. Найдя интегрирующий множитель, решить уравнение
$$2xydx + (2y^3 - x^2)dy = 0.$$[7]

□ $P = 2xy$, $P_y = 2x$.
$Q = 2y^3 - x^2$, $Q_x = -2x$
$P_y \neq Q_x$. ☹
☺ Интегрирующий множитель $\mu = ?$
① $\underline{\mu = \mu(x)}$
(3.5) принимает вид
$\mu(P_y - Q_x) = Q\mu_x$
или, при $2y^3 - x^2 \neq 0$,
$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}dx. \tag{3.5x}$$
Имеем

---

[6] 🕮 Степанов, гл. II §3 п 3,
🕮 Филиппов, Сб. задач. §6 п 3,
🕮 Ипатова, Пыркова, Седов, §9 п 1
[7] С§4.20ю

$$\left(\ln|\mu|\right)_x = \frac{4x}{2y^3 - x^2} = f(x,\, y).$$ ☹

② $\mu = \mu(y)$

(3.5) принимает вид

$$\mu\left(P_y - Q_x\right) = -P\mu_y$$

или, при $2xy \neq 0$,

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{P_y - Q_x}{P}\,dy\,. \qquad (3.5y)$$

Имеем

$$\left(\ln\mu\right)_y = -\frac{4x}{2xy} = -\frac{2}{y} = f(y).$$ ☺

$$d\ln|\mu| = -\frac{2}{y}\,dy = -2d\ln|y|\,.$$

$\mu = \frac{1}{y^2}$, например.

$\frac{2xy}{y^2}\,dx + \frac{2y^3 - x^2}{y^2}\,dy = 0$ - ОДУ в полных дифференциалах:

$$dU = \frac{2x}{y}\,dx + \left(2y - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0\,,$$

$$U_x = \frac{2x}{y} \rightarrow U = \frac{x^2}{y} + g(y).$$

$$U_y = -\frac{x^2}{y^2} + g'(y) = 2y - \frac{x^2}{y^2} \rightarrow g'(y) = 2y \rightarrow g(y) = y^2 + c\,.$$

$U = \frac{x^2}{y} + y^2 + c$ при $2xy \neq 0$.

❶ $x = 0$ - не решение.

❷ $y = 0$ - решение.

Ответ: $\frac{x^2}{y} + y^2 = C$, $y = 0$.

■

Пример 3.5. Решить уравнение, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных

$$\left(x^2 + y^2 + x\right)dx + ydy = 0\,.$$[8]

☐ **I способ.** *Выделение интегрируемых комбинаций и замена.*

$$\left(x^2 + y^2\right)dx + xdx + ydy = 0\,.$$

$$\left(x^2 + y^2\right)dx + \frac{1}{2}d\left(x^2 + y^2\right) = 0\,.$$

Замена:

---

[8] Ф195

$z(x)=x^2+y^2$,

$zdx+\frac{1}{2}dz=0$ - ОДУ с разделяющимися переменными.

$\frac{dz}{z}=-2dx$.

$\ln|z|=-2x+C$.

Обратная замена:

$\boxed{\ln\left(x^2+y^2\right)=-2x+C}$.

II способ. *Интегрирующий множитель.*

① $\underline{\mu=\mu(y)}$

(3.5) принимает вид

$\mu\left(P_y-Q_x\right)=-P\mu_y$

или, при $x^2+y^2+x\neq 0$,

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{P_y-Q_x}{P}dy. \qquad (3.5y)$$

Имеем

$(\ln\mu)_y=-\frac{2y}{x^2+y^2+x}=f(x,\ y)$. ☹

② $\underline{\mu=\mu(x)}$

(3.5) принимает вид

$\mu\left(P_y-Q_x\right)=Q\mu_x$

или, при $y\neq 0$,

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P_y-Q_x}{Q}dx. \qquad (3.5x)$$

Имеем

$(\ln\mu)_x=\frac{2y}{y}=2$. ☺

$d\ln|\mu|=2dx$.

$\boxed{\mu=e^{2x}}$, например.

$\left(x^2+y^2+x\right)e^{2x}dx+ye^{2x}dy=0$ - ОДУ в полных дифференциалах:

$dU=\left(x^2+y^2+x\right)e^{2x}dx+ye^{2x}dy=0$,

$U_x=\left(x^2+y^2+x\right)e^{2x} \rightarrow U=\frac{x^2+y^2}{2}e^{2x}+g(y)$.

$U_y=\frac{2y}{2}e^{2x}+g'(y) = ye^{2x} \rightarrow g'(y)=0 \rightarrow g(y)=c$.

$U=\frac{x^2+y^2}{2}e^{2x}+c$ при $y\neq 0$.

❶ $y=0$ - не решение.

Ответ: $\frac{x^2+y^2}{2}e^{2x}=C$.

■

§4. Линейные ОДУ.

4.1. Линейные ОДУ n-го порядка: основные понятия.

Определение. Линейным ОДУ n-го порядка называется уравнение вида
$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x) = b(x), \qquad (1.1)$$

Неизвестные функции и все ее производные входят в ОДУ (1.1) ЛИНЕЙНО (т.е. в первой степени).

Определение ЛОДУ n-го порядка (1.1) называется ***однородным***, если $b(x) \equiv 0$ $\forall x \in I$.
В противном случае оно называется ***неоднородным***.

Определение. Функция $F(x,\ y\ y',\ \dots,\ y^{(n)}) = 0$ называется ***однородной функцией аргументов*** $y\ y',\ \dots,\ y^{(n)}$, если $\forall t > 0$
$F(x,\ ty\ ty',\ \dots,\ ty^{(n)}) = t^m F(x,\ y\ y',\ \dots,\ y^{(n)})$,
где m - показатель однородности.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x) = 0 \text{ -} \qquad (1.2)$$
однородное относительно искомой функции и ее производных с показателем однородности $m = 1$.

ЛОДУ (1.1) и (1.2) часто записывают в виде
$$Ly = b(x), \qquad (1.1а)$$
$$Ly = 0, \qquad (1.2а)$$
где $Ly = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x)$ - дифференциальный оператор порядка n.

Замечание 1.1. Уравнения (1.1а) и (1.2а) - "стенографический трюк".
Переход на лаконичный стиль очень часто производит качественный скачок в свободе мышления и манипулирования:
от детальной записи (1.1) порой рябит в глазах,
суть не видна: "за деревьями леса не видно".

Замечание 1.2. В дальнейшем будем считать $a_0(x) \equiv 1$, так как $a_0(x) \neq 0$ (иначе изменился бы порядок ОДУ) и на него можно смело делить:
$a_k(x) := \dfrac{a_k(x)}{a_0(x)}$, $b(x) := \dfrac{b(x)}{a_0(x)}$.

Пусть E - линейное пространство,
т.е. в E определено

- сложение элементов,
- умножение на число (действительное или комплексное).

Определение. Заданный на E оператор A называется линейным,
если $\forall y_1,\ y_2 \in E$ и любых чисел $C_1,\ C_2$ справедливо равенство
$A(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 A y_1 + C_2 A y_2$.

Лемма[9] 1.1. L - линейный оператор.

○ (Адамар) Пусть C_1 и C_2 постоянные (числа).
Так как
$(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))^{(k)} = C_1 y_1^{(k)}(x) + C_2 y_2^{(k)}(x)$,
то, умножая обе части на a_{n-k} при $k = \overline{0, n}$
и суммируя по k от 0 до n, получим
$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L y_1 + C_2 L y_2$

●

Теорема[10] 1.1. (принцип суперпозиции)
Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения однородного ЛОДУ (1.2) (или (1.2а)), то их линейная комбинация
$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$
при любых значениях постоянных C_1 и C_2 является решением однородного ЛОДУ (1.2) (или (1.2а)).

○ $L y_1(x) = 0$, $L y_2(x) = 0$ по условию.
По **лемме 1.1** L - линейный оператор.
По определению линейного оператора
$L y(x) = L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L y_1 + C_2 L y_2 = 0$,
т.е. $y(x)$ - решение однородного ЛОДУ (1.2) (или (1.2а)).

●

Замечание 1.3. Для неоднородных ЛОДУ (1.1) (или (1.1а)) **принцип суперпозиции** (в такой формулировке) <u>не выполняется</u>.
Строго говоря, неоднородное ЛОДУ (1.1) не является линейным, хотя его и принято так называть.
Есть модификации **принципа суперпозиции** для неоднородных ЛОДУ.

Теорема 1.2. (ПС1)
Если $y_1(x)$ - решение неоднородного ЛОДУ
$L y = b_1(x)$,
а $y_2(x)$ - решение неоднородного ЛОДУ

---

[9] λῆμμα - допущение.
[10] θεωρημα - зрелище, представление (Архимед: рассматриваю, обдумываю).

$Ly = b_2(x)$,

то $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ - решение неоднородного ЛОДУ

$Ly = b_1(x) + b_2(x)$

○ Действительно, в силу линейности дифференциального оператора L:

$Ly(x) = L(y_1(x) + y_2(x)) = Ly_1(x) + Ly_2(x) = b_1(x) + b_2(x)$.

●

Теорема 1.3. (ПС2)

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения неоднородного ЛОДУ (1.1) (или (1.1а)), то их разность

$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$

есть решение соответствующего однородного ЛОДУ (1.2) (или (1.2а)).

○ В силу линейности дифференциального оператора L:

$Ly(x) = L(y_1(x) - y_2(x)) = Ly_1(x) - Ly_2(x) = b(x) - b(x) = 0$.

●

Следствие. Всякое решение неоднородного ЛОДУ (1.1) (или (1.1а)) есть сумма

- частного (т.е. фиксированного) решения неоднородного ЛОДУ (1.1)
- и некоторого решения однородного ЛОДУ (1.2).

○ Пусть

$y = y_p + y_o$,

где

$Ly_p = b(x)$,

$Ly_o = 0$.

В силу линейности дифференциального оператора L:

$Ly(x) = L(y_p(x) + y_o(x)) = Ly_p(x) + Ly_0(x) = b(x) + 0 = b(x)$.

●

Задача Коши для ОДУ n-го порядка в нормальной форме (форме Коши) ставится следующим образом:

найти решение ОДУ

$y^{(n)}(x) = f\left(x,\ y(x),\ y'(x), \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\right)$

на I, $x_0 \in I$, при условиях

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ... , $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$,

которые принято называть ***начальными***.

Теорема 1.4. (существования и единственности для ОДУ n-го порядка)[11]

Пусть в $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{1+n}_{x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}}$

[11] Пока только формулировка! Доказательство на лекции 15 в общем случае.

- функция $f\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ \dots,\ y^{(n-1)}(x)\right)$ и ее частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$, ..., $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ - непрерывны,
- точка $(x_0,\ y_0,\ y_1,\ \dots,\ y_{n-1}) \in \widetilde{\Omega}$.

Тогда при НУ (начальных условиях)
$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$
уравнение
$y^{(n)}(x) = f\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ \dots,\ y^{(n-1)}(x)\right)$
имеет единственное решение в некоторой окрестности точки $(x_0) \in I$.

4.2. ЛОДУ 1-го порядка.

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (2.1)$$

ЛОДУ 1-го порядка в нормальной форме Коши
$y' = b(x) - a(x)y$.

Замечание 2.1. Если $a(x) \in C(I)$, $b(x) \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$,
то $f(x) = b(x) - a(x)y$ и $f_y = -a(x)$ непрерывны на I,
следовательно, существует единственное решение задачи Коши по **теореме существования и единственности**.

Замечание 2.2. При $a(x) \in C(I)$, $b(x) \in C(I)$, $f(x) \in C(I)$ и $f_y \in C(I)$
$|f(x)| \le |a(x)||y| + |b(x)|$,
следовательно, по **теореме о продолжимости на весь заданный интервал**, считая $I = \mathbb{R}$, получаем, что решение задачи Коши продолжимо на $\mathbb{R}$.
Т.о., для ЛОДУ 1-го порядка **теорема существования и единственности** носит <u>глобальный</u> характер.

Замечание 2.3. Если $y_o:\ y_o' + a(x)y_o = 0$,
то Cy_o - решение (общее) однородного ЛОДУ
$$y' + a(x)y = 0. \qquad (2.2)$$

Замечание 2.4. Любое решение (2.1) представимо в виде
$y = Cy_o + y_p$,
где y_p - какое-либо решение (2.1),
а Cy_o - решение (общее) (2.2).