Гл. I. Основные понятия. Простейшие типы ДУ.

Теорема 2.1. Общее решение ЛОДУ 1-го порядка (2.1) находится двумя квадратурами.

○Доказательство методом Бернулли.

Решение (2.1) будем искать в виде

$y(x)=u(x)\cdot v(x)$.

Тогда

$u'\cdot v+u\cdot v'+auv=b$

или

$u'\cdot v+u(v'+av)=b$.

Пусть $v(x)$:

$$v'+av=0, \qquad (2.2)$$

т.е. $v(x)$ - решение однородного ЛОДУ (2.2), которое является уравнением с разделяющимися переменными.

① $v=0$ - решение (2.2).

② $v\neq 0$ → $\frac{dv}{v}=-adx$ → $\ln|v|=-\int\limits_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi+\tilde{C}$, $\tilde{C}\in\mathbb{R}$,

т.е. $|v|=\hat{C}e^{-\int\limits_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi}$, $\hat{C}\geq 0$ с учетом случая ①.

Раскрывая модуль, получаем

$v(x)=\breve{C}e^{-\int\limits_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi}$, $\breve{C}\in\mathbb{R}$.

При этом

$u'\cdot v=b$.

Если $b\neq 0$, то и $v\neq 0$ $(\breve{C}\neq 0)$. Тогда

$$u'=\frac{b}{v}=\frac{1}{\breve{C}}b(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi},$$

следовательно,

$$u=\frac{1}{\breve{C}}\int\limits_{x_0}^{x}b(\eta)e^{\int\limits_{x_0}^{\eta}a(\xi)d\xi}d\eta+C_1.$$

$$y(x)=u(x)\cdot v(x)=\left(\frac{1}{\breve{C}}\int\limits_{x_0}^{x}b(\eta)e^{\int\limits_{x_0}^{\eta}a(\xi)d\xi}d\eta+C_1\right)\breve{C}e^{-\int\limits_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi}.$$

Откуда

$$y(x)=e^{-\int\limits_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi}\int\limits_{x_0}^{x}b(\eta)e^{\int\limits_{x_0}^{\eta}a(\xi)d\xi}d\eta+Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi}, \qquad (2.3)$$

где $C=C_1\cdot\breve{C}$.

●

Замечание 2.5. Существование решения ЛОДУ 1-го порядка (2.1)доказали и без теоремы существования и единственности - мы его нашли.

❶ При фиксированном значении C получим частное решение ЛОДУ (2.1)
Например, при $C=0$

$$y_p(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi}\int_{x_0}^{x}b(\eta)e^{\int_{x_0}^{\eta}a(\xi)d\xi}d\eta.$$

❷ При $b(x)\equiv 0$ имеем решение (общее) однородного ЛОДУ (2.2)

$$y_o(x)=Ce^{-\int_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi}.$$

Утверждение 2.1. Если $y=y_p(x)$ - известное частное решение неоднородного ЛОДУ (2.1), то общее решение (2.1) находится одной квадратурой.

○ **I.** Следствие теоремы 2.1

II. По следствию **теоремы 1.3**

$$y(x)=y_o(x)+y_p(x).$$

А $y_o(x)$ - решение однородного ЛОДУ (2.2)

$$y_0'+ay_0=0 \ - \qquad (2.2)$$

ОДУ с разделяющимися переменными находится одной квадратурой[1]

$$y_o(x)=Ce^{-\int_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi}.$$

●

Утверждение 2.2. Если известны два различных частных решения неоднородного ЛОДУ (2.1), то общее решение (2.1) находится без квадратур.

○ $y(x)=C\big(y_{p_1}(x)-y_{p_2}(x)\big)+y_{p_1}(x)$ -

это следствие **теоремы 1.3** (ПС2).

●

Теорема 2.2. Решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'+a(x)y=b(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

существует и единственно $\forall x_0\in I$ и $\forall y_0\in R$ на всем I.

○ Решение (2.1) нашли - формула (2.3)

$\forall x_0\in I$ и $\forall y_0\in R$ имеем

$$y_0=y(x_0)=e^0\cdot 0+Ce^0=C.$$

Т.о., постоянная C определяется единственным образом.

$$y(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi}\left[y_0+\int_{x_0}^{x}b(\eta)e^{\int_{x_0}^{\eta}a(\xi)d\xi}d\eta\right] -$$

решение (2.1) на всем промежутке I.

---

[1] См. доказательство **теоремы 2.1**.

●

Замечание 2.6. В случае ЛОДУ 1-го порядка получается, что **теорема существования и единственности** (**теоремы 2.2**) носит не локальный, а ГЛОБАЛЬНЫЙ характер.

Замечание 2.7. Формулу (2.3) редко используют на практике.
Обычно находят решение однородного ЛОДУ (2.2) методом разделения переменных,
а затем для поиска частного решения применяют
МЕТОД ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННОГО[2]

См. **теорему 2.1** (метод Бернулли):
находим решение однородного ЛОДУ (2.2)

$$y_o(x) = \breve{C} e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}.$$

Затем полагаем $\breve{C} = \breve{C}(x)$:

$$\breve{C}'(x) e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} + \underline{\breve{C}(x) e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} \cdot (-a(x))} + \underline{a(x)\breve{C}(x) e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}} = b(x),$$

т.е.

$$\breve{C}'(x) e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} = b(x)$$

или

$$\breve{C}'(x) = b(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}.$$

Интегрируем

$$\breve{C}(x) = \int_{x_0}^{x} b(\eta) e^{\int_{x_0}^{\eta} a(\xi)d\xi} d\eta + C$$

и подставляем в решение однородного уравнения

$$y_o(x) = \breve{C} e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} = \left(\int_{x_0}^{x} b(\eta) e^{\int_{x_0}^{\eta} a(\xi)d\xi} d\eta + C \right) e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} -$$

получили формулу (2.3).

4.3. Уравнение Бернулли.

Определение. Уравнение вида

$$y' + a(x)y = q(x)y^n, \ n \neq 0{,}1, \qquad \text{(УБ)}$$

где n - некоторое постоянное число, называют уравнением Бернулли.

$n = 0$ дает неоднородное ЛОДУ (2.1) при $b = q$,

---

[2] Лагранж (1762, 1765, 1775)
Эйлер (Сочинение о приливах и отливах)
Д. Бернулли (1740)

$n = 1$ дает однородное ЛОДУ (2.4) при $a := a - q$.

Утверждение 3.1. Замена $z(x) = y^{1-n}$ сводит (УБ) к ЛОДУ вида (2.1).

○ ① Если $n > 0$, то $y = 0$ - решение (УБ).

② При $y \neq 0$ разделим (УБ) на y^n:

$$y^{-n} y' + a(x) y^{1-n} = q(x).$$

Легко заметить, что

$$\frac{d}{dx} y^{1-n} = (1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx}.$$

Замена

$$z(x) = y^{1-n}(x)$$

сводит (УБ) к ЛОДУ

$$z' + (1-n) a(x) z = (1-n) q(x),$$

которое уже умеем решать.

●

§4.4. Уравнение Риккати.

Определение. Уравнение вида

$$y' = p(x) y + q(x) y^2 + f(x) \qquad \text{(УР)}$$

называют уравнением Риккати[3].

Уравнение Риккати возникает при решении задач оценивания и управления в линейных динамических системах, где является единственным средством получения аналитических результатов при решении.

Замечание 4.4.1. (УР) интегрируется в квадратурах лишь в некоторых частных случаях.

Например, если $p = const$, $q = const$ и $f = const$. то переменные разделятся.

Замечание 4.4.2. Лиувилль (1842 г.) доказал, что уравнение

$$y' = y^2 + x^\alpha$$

разрешимо в квадратурах только, если $\alpha = \dfrac{-4n}{2n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\alpha = -2$[4], и только в этом случае[5][6][7].

---

[3] Риккати [Riccati. Acta Erud VIII (1724)] исследовал уравнение $y' + a(x) y^2 = b x^m$ (***специальное уравнение Риккати***), которое связывается обычно с его именем [🕮 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения]

[4] приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = z/x$ [Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах]

[5] 🕮 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

[6] 🕮 Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

[7] 🕮 Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.

Утверждение 4.4.1. Если удается угадать некоторое частное решение $y = y_p(x)$ уравнения (УР), то заменой

$$y(x) = y_p(x) + z(x)$$

(УР) сводится к (УБ).

○ $y' = \underline{y_p'(x)} + z'(x) = \underline{p(x)y_p} + p(x)z + \underline{q(x)y_p{}^2} + 2q(x)y_p z + q(x)z^2 + \underline{f(x)} \rightarrow$

$z' = p(x)z + 2q(x)y_p z + q(x)z^2$ -

это уже уравнение Бернулли.

●

Замечание 4.4.3. Замена

$$u(x) = \frac{1}{z(x)}$$

приведет его к линейному.

§5. ОДУ, приводимые к ДУ с разделяющимися переменными.

5.1. Геометрические свойства семейств интегральных кривых.

5.1.1. ОДУ, не содержащие (явно) зависимое переменное.

Для ОДУ

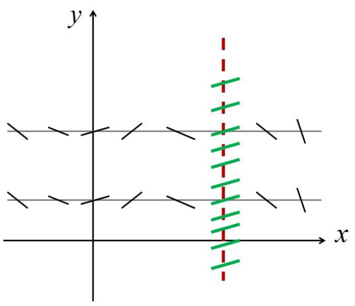
$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1.1}$$

рассмотрим замену

$$\begin{cases} \tilde{x} = x, \\ \tilde{y} = y + c. \end{cases} \tag{1.1a}$$

Так как $d\tilde{x} = dx$ и $d\tilde{y} = dy$, то при замене (1.1а) ОДУ (1.1) переходит в себя.

Таким образом, если $\Phi(x,\, y) = 0$ является интегралом (частным) ОДУ (1.1), то $\Phi(\tilde{x},\, \tilde{y}) = 0$ или $\Phi(x,\, y + c) = 0$ - тоже интеграл (общий) ОДУ (1.1) для любой постоянной c.



Замена (преобразование) (1.1а) геометрически заключается в том, что все точки плоскости x, y переносятся на одну и ту же величину c параллельно оси ординат - ***перенос***.

ОДУ (1.1) допускает преобразование (1.1а), т.е. поле направлений после такого переноса совпадает с первоначальным.

Линии $x = x_0$ суть изоклины $\left(\dfrac{dy}{dx} = f(x_0) = const\right)$.

Семейство интегральных кривых при преобразовании (1.1а) (переносе) переходит само в себя.

Преобразования переноса образуют группу преобразований.

Определение. ***Произведением*** fg ***преобразований*** f и g одной совокупности (одного множества) называется преобразование, получающееся последовательным применением сначала преобразования g, а потом f, т.е.
$$(fg)(x) = f(g(x)).$$

Определение. Совокупность (множество) преобразований $\mathscr{P}$ называется ***группой преобразований***, если она удовлетворяет условиям

1) произведение любых двух преобразований из совокупности $\mathscr{P}$ принадлежит совокупности $\mathscr{P}$;
2) тождественное преобразование принадлежит совокупности $\mathscr{P}$;
3) каждое преобразование из совокупности $\mathscr{P}$ имеет обратное преобразование, также принадлежащее совокупности $\mathscr{P}$.

5.1.2. ОДУ, не содержащие (явно) независимое переменное.

Аналогично ОДУ
$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{1.2}$$
допускает, не меняющую его, группу преобразований (группу переносов параллельно оси абсцисс)
$$\begin{cases} \tilde{x} = x + c, \\ \tilde{y} = y. \end{cases} \tag{1.2a}$$
Общий интеграл (1.2) получается из частного заменой x на $x + c$.

5.2. Однородные ОДУ.

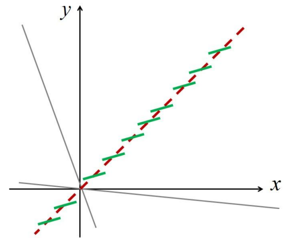
Рассмотрим с этой точки зрения ОДУ
$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.3}$$

Определение. ОДУ (1-го порядка в нормальной форме Коши)
$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y) \tag{2.од}$$
называется ***однородным относительно*** x ***и*** y,
если $f(x,\ y)$ является ***однородной функцией переменных*** x ***и*** y с показателем однородности равным 0, т.е.
$$f(tx,\ ty) = f(x,\ y).$$

Т.о., ОДУ (2.3) - однородное.

ОДУ (2.3) допускает группу преобразований

$$\begin{cases} \tilde{x} = Cx, \\ \tilde{y} = Cy. \end{cases} \qquad (2.3а)$$



Преобразование (2.3а) - преобразование подобия (***гомотетия***) с центром подобия в начале координат:
все направления касательных одинаковы на каждой прямой, проходящей через начало координат.

$y = ax$ - изоклины.

Если $\Phi(x,\ y) = 0$ является интегралом (частным) ОДУ (2.3), то $\Phi(\tilde{x},\ \tilde{y}) = 0$ или $\Phi(Cx,\ Cy) = 0$ - тоже интеграл (общий) ОДУ (2.3) для любой постоянной C.

Замечание 2.1. ОДУ в дифференциалах

$$P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy = 0$$

является однородным относительно x и y,
если функции $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ - однородные функции относительно переменных x и y с одним и тем же показателем однородности m.
Действительно, при, например, $Q(x,\ y) \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,\ y)}{Q(x,\ y)}.$$

Отношение же двух однородных функций с одинаковыми показателями однородности

$$\frac{P(tx,\ ty)}{Q(tx,\ ty)} = \frac{t^m P(x,\ y)}{t^m Q(x,\ y)} = \frac{P(x,\ y)}{Q(x,\ y)}$$

является однородной функцией с нулевым показателем.

Утверждение 2.1. Замена[8]

$$z = z(x) = \frac{y}{x} \qquad (2.3б)$$

приводит однородное ОДУ (2.3) к ОДУ с разделяющимися переменными.

○ $y = z(x) \cdot x$,

$y' = z' \cdot x + z = f(z)$

или

$xz' = f(z) - z = \varphi(z)$.

① $\underline{\varphi(z) \neq 0}$: $\dfrac{dz}{\varphi(z)} = \dfrac{dx}{x}$ → $\Phi(z) = \ln|x| + C$,

[8] Впервые введена Лейбницем в 1691 г.

где $\Phi'(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$, C - произвольная постоянная.

② $\underline{\varphi(z) = 0}$: т.е. $f(z) = z \to \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

❶ $y = 0$ - решение.

❷ $y \neq 0$: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \to \ln|y| = \ln(C_1|x|)$, $C_1 > 0$,

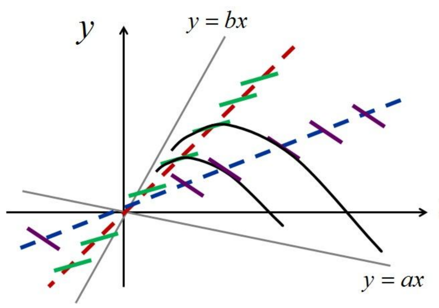
т.е. $y = Cx$, где (с учетом ❶) $C \in \mathbb{R}$.

●

Замечание 2.2. Ось Oy не решение в такой постановке.

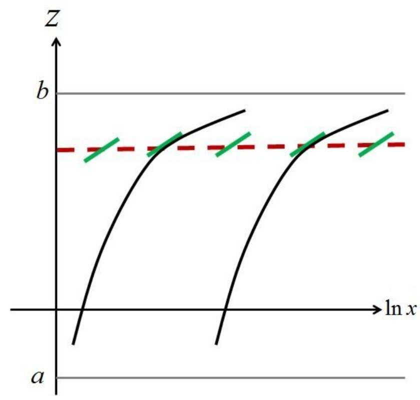
Для $xdy = ydx$ $x = 0$ - решение.

$$a < \frac{y}{x} < b$$



гомотетия

$$z = \frac{y}{x}, \qquad a < z < b$$



сдвиг по оси абсцисс

5.3 ОДУ, приводимые к однородным или ОДУ с разделяющимися переменными.

Утверждение 3.1. ОДУ вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{3.1}$$

приводится к ОДУ с разделяющимися переменными.

○ ① При $c_1 = c_2 = 0$ ОДУ (3.1) однородное.

② $(c_1)^2 + (c_2)^2 \neq 0$

❶ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение

$x=\alpha$, $y=\beta$.

При замене

$$\begin{cases} \tilde{x} = x-\alpha, \\ \tilde{y} = y-\beta \end{cases}$$

$d\tilde{x}=dx$, $d\tilde{y}=dy$

и

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = f\left(\frac{a_1(\tilde{x}+\alpha)+b_1(\tilde{y}+\beta)+c_1}{a_2(\tilde{x}+\alpha)+b_2(\tilde{y}+\beta)+c_2}\right) = f\left(\frac{a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}+c_1+a_1\alpha+b_1\beta}{a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}+c_2+a_2\alpha+b_2\beta}\right) =$$

$$= f\left(\frac{a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}}{a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}}\right) \text{ -}$$

однородное ОДУ.

❷ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$.

$$y' = f\left(\frac{\lambda a_2 x + \lambda b_2 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) = f\left(\frac{\lambda(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) = \varphi(a_2 x + b_2 y).$$

Замена (см. лекцию 2) $z(x) = a_2 x + b_2 y$ приводит ОДУ (3.1) к ОДУ с разделяющимися переменными.

●

5.4 Обобщенно однородные ОДУ.

Определение. ОДУ 1-го порядка называют ***обобщенно однородным***, если оно не меняется при замене

$$\begin{cases} \tilde{x} = tx, \\ \tilde{y} = t^p y, \end{cases}$$

где p - рациональное.

Замечание 4.1. При этом y' заменяется на $t^{p-1}y'$:

$$y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{d(t^p y)}{d(tx)} = t^{p-1}\frac{dy}{dx} = t^{p-1}y'.$$

Утверждение 4.1. Замена

$y(x) = (z(x))^p$ (т.е. $z(x) = y^{1/p}$)

сводит обобщенно однородное ОДУ к однородному ОДУ.

○ ОДУ после замены $z(x) = y^{1/p}$, т.е. в переменных x, z, не меняется при замене

$$\begin{cases} \tilde{x} = tx, \\ \tilde{z} = tz. \end{cases}$$

Следовательно, оно однородное.

●

Замечание 4.2. Замена $y(x) = -(z(x))^p$ также имеет место быть.
Если $p < 0$, то следует проверить, не является ли $y(x) = 0$ решением.

Замечание 4.3. После замены $y(x) = \pm(z(x))^p$ ОДУ становится однородным. Замена $w = w(x) = \frac{z(x)}{x}$, согласно **утверждению 2.1**, сводит его к ОДУ с разделяющимися переменными.
Тогда $y(x) = \pm(z(x))^p = \pm(w(x) \cdot x)^p = \pm(w(x))^p x^p = W(x)x^p$.
В силу этого на практике удобно сразу, как только найдено p, делать замену $y(x) = W(x)x^p$.

Пример 4.1. Решить $y' = x + \frac{x^3}{y}$.

☐ Данное ОДУ не является ОДУ
☹ с разделяющимися переменными,
☹ не линейное.
Проверим, является ли оно обобщенно однородным:
заменим $x \xrightarrow{на} tx$, $y \xrightarrow{на} t^p y$, $y' \xrightarrow{на} t^{p-1} y'$,
тогда

$$t^{p-1} y' = tx + \frac{t^3 x^3}{t^p y}.$$

ОДУ не изменится, если $p - 1 = 1 = 3 - p$.
Оба равенства выполняются при $\underline{p = 2}$.

① **<u>способ</u>**.
Соответствующая замена:
❶ при $y > 0$ $\quad y = z^2$.
При этом

$$y' = 2zz'.$$

И ОДУ в переменных x, z принимает вид

$$2zz' = x + \frac{x^3}{z^2}.$$

Заметим, что $z \neq 0$ (по ОДЗ $y \neq 0$).
Итак

$$2z' = \frac{x}{z} + \frac{x^3}{z^3}$$ - однородное ОДУ.

Согласно **утверждению 2.1** сделаем замену

$$u(x) = \frac{z}{x}$$

или

$$z = xu, \; z' = u + xu'.$$

Получаем

$$2u + 2xu' = \frac{1}{u} + \frac{1}{u^3}$$

или

$xu' = \frac{1}{2u} + \frac{1}{2u^3} - u$ - ОДУ с разделяющимися переменными.

$\frac{2u^3 du}{u^2 + 1 - 2u^4} = \frac{dx}{x}$ - ОДУ с разделенными переменными.

Перепишем его в виде

$$\frac{-2u^3 du}{2u^4 - u^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

или

$$\frac{-2u^3 du}{(2u^2+1)(u^2-1)} = \frac{dx}{x}\text{[9]}.$$

Так как

$$2u^3 du = u^2 du^2,$$

удобно сделать замену искомой функции

$$\boxed{v = u^2}.$$

В переменных x, v ОДУ принимает вид

$$\frac{-v dv}{(2v+1)(v-1)} = \frac{dx}{x}.$$

Разложим левую часть ОДУ на простейшие дроби

$$\frac{-v}{(2v+1)(v-1)} = \frac{a}{2v+1} + \frac{b}{v-1},$$

$$\begin{cases} a + 2b = -1, \\ -a + b = 0 \end{cases} \rightarrow a = b = -\frac{1}{3}.$$

Получаем $-\frac{1}{3}\frac{dv}{2v+1} - \frac{1}{3}\frac{dv}{v-1} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя, находим

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\ln(2v+1) - \frac{1}{3}\ln(v-1) = \ln x + \tilde{C},$$

или

$$\frac{1}{(2v+1)(v-1)^2} = \hat{C}x^6,$$

производя обратные замены при $C = \frac{1}{\hat{C}}$

---

[9] $2t^2 - t - 1 = 0 \rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 1 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \left[\begin{array}{l} 4/4 \\ -2/4 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -1/2 \end{array}\right.$.

$$C = x^6\left(2u^2+1\right)\left(u^2-1\right)^2 = x^6\left(2\frac{z^2}{x^2}+1\right)\left(\frac{z^2}{x^2}-1\right)^2 = \left(2z^2+x^2\right)\left(z^2-x^2\right)^2 =$$

$$= \boxed{\left(2y+x^2\right)\left(y-x^2\right)^2}.$$

❷ при $y<0$ $\quad y=-z^2$.

При этом

$y' = -2zz'$.

И ОДУ в переменных x, z принимает вид

$$2zz' = -x + \frac{x^3}{z^2}.$$

Заметим, что $z \neq 0$ (по ОДЗ $y \neq 0$).

Итак

$$2z' = -\frac{x}{z} + \frac{x^3}{z^3}$$ - однородное ОДУ.

Согласно **утверждению 2.1** сделаем замену

$$\boxed{u(x) = \frac{z}{x}}$$

или

$z = xu$, $z' = u + xu'$.

Получаем

$$2u + 2xu' = -\frac{1}{u} + \frac{1}{u^3}$$

или

$$xu' = -\frac{1}{2u} + \frac{1}{2u^3} - u$$ - ОДУ с разделяющимися переменными.

$$\frac{2u^3du}{1-u^2-2u^4} = \frac{dx}{x}$$ - ОДУ с разделенными переменными.

Перепишем его в виде

$$\frac{-2u^3du}{2u^4+u^2-1} = \frac{dx}{x}$$

или

$$\frac{-2u^3du}{\left(2u^2-1\right)\left(u^2+1\right)} = \frac{dx}{x}$$ [10].

Так как

$2u^3du = u^2du^2$,

удобно сделать замену искомой функции

$\boxed{v = u^2}$.

В переменных x, v ОДУ принимает вид

---

[10] $2t^2+t-1=0 \rightarrow t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+1\cdot 2\cdot 4}}{2\cdot 2} = \dfrac{-1\pm 3}{4} = \left[\begin{array}{l} 2/4 \\ -4/4 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 1/2 \\ -1 \end{array}\right.$.

$$\frac{-vdv}{(2v-1)(v+1)}=\frac{dx}{x}.$$

Разложим левую часть ОДУ на простейшие дроби

$$\frac{-v}{(2v-1)(v+1)}=\frac{a}{2v-1}+\frac{b}{v+1},$$

$$\begin{cases}a+2b=-1,\\ a-b=0\end{cases} \rightarrow a=b=-\frac{1}{3}.$$

Получаем $-\frac{1}{3}\cdot\frac{dv}{2v-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{dv}{v+1}=\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, находим

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln(2v-1)-\frac{1}{3}\ln(v+1)=\ln x+\widetilde{C},$$

или

$$\frac{1}{(2v-1)(v+1)^2}=\hat{C}x^6,$$

производя обратные замены при $C=\frac{1}{\hat{C}}$

$$C=x^6(2u^2-1)(u^2+1)^2 \quad = \quad x^6\left(2\frac{z^2}{x^2}-1\right)\left(\frac{z^2}{x^2}+1\right)^2 \quad = \quad (2z^2-x^2)(z^2+x^2)^2 \quad =$$

$$=\underline{-(2y+x^2)(y-x^2)^2}\,|$$ - по сути, тот же ответ.

② способ.

Сразу делаем замену:

$y=W(x)\cdot x^2$.

При этом

$y'=W'\cdot x^2+W\cdot 2x$.

И ОДУ в переменных x, W принимает вид

$W'\cdot x^2+W\cdot 2x=x+\frac{x^3}{x^2W}$ или $W'\cdot x^2=x+\frac{x}{W}-2xW$, или $xW'=1+\frac{1}{W}-2W$, или

$xW'=\frac{1+W-2W^2}{W}$ - ОДУ с разделяющимися переменными.

Заметим, что $W\neq 0$ (по ОДЗ $y\neq 0$).

$\frac{WdW}{1+W-2W^2}=\frac{dx}{x}$ - ОДУ с разделенными переменными.

Перепишем его в виде

$$\frac{-WdW}{2W^2-W-1}=\frac{dx}{x}$$

или

$$\frac{-Wdu}{(2W+1)(W-1)}=\frac{dx}{x}$$ [11].

Разложим левую часть ОДУ на простейшие дроби

$$\frac{-W}{(2W+1)(W-1)}=\frac{a}{2W+1}+\frac{b}{W-1},$$

$$\begin{cases} a+2b=-1, \\ -a+b=0 \end{cases} \rightarrow \ a=b=-\frac{1}{3}.$$

Получаем $-\frac{1}{3}\frac{dW}{2W+1}-\frac{1}{3}\frac{dW}{W-1}=\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, находим

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln(2W+1)-\frac{1}{3}\ln(W-1)=\ln x+\widetilde{C},$$

или

$$\frac{1}{(2W+1)(W-1)^2}=\hat{C}x^6,$$

производя обратные замены при $C=\frac{1}{\hat{C}}$

$$C = x^6\left(2\frac{y}{x^2}+1\right)\left(\frac{y}{x^2}-1\right)^2 = \underline{(2y+x^2)(y-x^2)^2}|.$$

Ответ: $(2y+x^2)(y-x^2)^2=C$.

■

§6. Методы понижения порядка ДУ.

6.1. Обе части ОДУ можно (удается) преобразовать к полным производным.

Пример 1.1. Решить $(y+1)y''=\sin x-(y')^2$.

□ $(y+1)y''+(y')^2=\sin x$

$$((y+1)y')'=(-\cos x)'$$

$$(y+1)y'=-\cos x+C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$(y+1)\cdot(y+1)'=-\cos x+C$$

$$\left((y+1)^2\right)'=2(C-\cos x)$$

$$\boxed{(y+1)^2=2Cx-2\sin x+C_1}$$

---

[11] $2t^2-t-1=0 \rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+1\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}=\frac{1\pm3}{4}=\left[\begin{array}{l}4/4\\ \\ -2/4\end{array}\right.=\left[\begin{array}{l}1\\ \\ -1/2\end{array}\right.$.

■

6.2. В ОДУ не входит (явно) искомая функция $y(x)$ (и возможно ее производные до некоторого порядка).

Если ОДУ имеет вид
$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right)=0$, $n \geq k \geq 1$,
то за новую искомую функцию берем
$\boxed{z=z(x)=y^{(k)}(x)}$.

Тогда
$y^{(k+1)}=z'$, ... , $y^{(n)}=z^{(n-k)}$
и порядок ОДУ понижается на k единиц:
$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right)=0$.

Основной случай: в ОДУ не входит искомая функция (зависимое переменное) $y(x)$:
$F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)=0$.

Заменой $z(x)=y'$ получаем
$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)=0$.

Допустим, что $z(x)$ найдено. Тогда

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} z(\xi) d\xi+C .$$

К этому случаю и будем стараться свести рассматриваемые далее типы ОДУ.

Отметим, что если ОДУ не содержит искомую функцию (зависимое переменное) $y(x)$, то замена

$$\begin{cases}\tilde{x}=x, \\ \tilde{y}=y+c\end{cases}$$

не меняет его.

<u>Основная идея</u>: использовать взаимно-однозначные преобразования $(x,\, y) \xrightarrow{\varphi} (\hat{x},\, \hat{y})$:

$$\begin{cases}\hat{x}=a(x,\, y), \\ \hat{y}=b(x,\, y).\end{cases}$$

Определение. ОДУ

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)=0 \qquad (2.1)$$

инвариантно относительно преобразования $\varphi:\begin{cases}\hat{x}=\hat{x}(x, y), \\ \hat{y}=\hat{y}(x, y),\end{cases}$, если

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)=F\left(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \ldots, \hat{y}^{(n)}\right).$$

Так ОДУ, не содержащее искомую функцию (зависимое переменное) $y(x)$, инвариантно относительно группы преобразований

$$\begin{cases} \hat{x} = x, \\ \hat{y} = y + c \end{cases} -$$

параллельного переноса вдоль оси ординат.

<u>Смысл понятен</u>: если сделаем преобразование, то ОДУ не изменится.

Вопрос: зачем все это?

Инвариантность задачи подсказывает ту замену, которая приводит к понижению порядка.