Лекция 6.

Гл. I. Основные понятия. Простейшие типы ДУ.

§7. ДУ, не разрешенные относительно производной.

7.2.3. Важные частные случаи.

7.2.3.а) ДУ, разрешенные относительно неизвестной функции.

$$y = f(x,\ y') \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x,\ p), \\ dy = pdx. \end{cases}$$

Параметризация

$u = x$, $v = p$,

т.е.

$X(x,p) = x$, $Y(x,p) = f(x,\ p)$, $P(x,p) = p$.

① Из (2.2.3) получим $\dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{f'_x - p\cdot 1}{f'_p - p\cdot 0}$ при $f'_p \neq 0$ или $\dfrac{dx}{dp} = -\dfrac{f'_p - p\cdot 0}{f'_x - p\cdot 1}$ при $f'_x \neq p$ - для тех, у кого память хорошая.

② "В лоб": $dy = f_x dx + f_p dp$.

$dy = pdx$, откуда

$pdx = f_x dx + f_p dp$ или $(f_x - p)dx + f_p dp = 0$.

И при $f'_x \neq p$ получаем $\dfrac{dx}{dp} = -\dfrac{f_p}{f_x - p}$ или при $f_p \neq 0$ получаем $\dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{f_x - p}{f_p}$.

Пусть в некоторой области последнее уравнение имеет решение

$x = x(p,\ C)$ или $p = p(x,\ C)$.

Тогда

$$\begin{cases} y = f(x(p,\ C),\ p), \\ x = x(p,\ C) \end{cases} \text{ или } y = f(x,\ p(x,\ C)),$$

что дает решение (1.1).

Пример 2.3.1. Решить уравнение $y = xy' + (y')^2$.

□ Применим метод введения параметра: $\begin{cases} y = xp + p^2, \\ dy = pdx. \end{cases}$

Продифференцируем 1-е уравнение: $dy = pdx + xdp + 2pdp$.

Так как $dy = pdx$, то получаем $(x + 2p)dp = 0$, т.е. $\left[\begin{array}{l} p = C, \\ p = -x/2. \end{array}\right.$

① $p = C$ → $y = Cx + C^2$ - однопараметрическое семейство решений.

② $p = -\dfrac{x}{2}$ → $y = x\left(-\dfrac{x}{2}\right) + \left(-\dfrac{x}{2}\right)^2 = -\dfrac{x^2}{4}$.

Однопараметрическое семейство решений не является общим решением, так как ни при каком значении постоянной C решение $y=-\frac{x^2}{4}$ из него получить не можем.

■

7.2.3.б) ДУ, разрешенные относительно независимого переменного.

$$x=f(y,\ y')\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x=f(y,\ p), \\ dy=pdx. \end{cases}$$

Параметризация

$u=y$, $v=p$,

т.е.

$X(y,p)=f(y,\ p)$, $Y(y,p)=y$, $P(y,p)=p$.

Из (2.2.3) получим

$$\frac{dv}{du}=-\frac{Y'_u-PX'_u}{Y'_v-PX'_v}$$

① Из (2.2.3) получим $\frac{dp}{dy}=-\frac{1-p\cdot f_y}{0-p\cdot f_p}$ при $pf_p\neq 0$ или $\frac{dy}{dp}=-\frac{0-p\cdot f_p}{1-p\cdot f_y}$ при $pf_y\neq 1$ - для тех, у кого память хорошая.

② "В лоб": $dx=f_y dy+f_p dp$.

$dy=pdx$, т.е. $dx=\frac{dy}{p}$, откуда при $p\neq 0$

$$\frac{dy}{p}=f_y dy+f_p dp \text{ или } \frac{pf_y-1}{p}dy+f_p dp=0.$$

И при $pf_y\neq 1$ получаем $\frac{dy}{dp}=-\frac{pf_p}{pf_y-1}$ или при $f_p\neq 0$ получаем $\frac{dp}{dy}=-\frac{pf_y-1}{pf_p}$.

Пусть в некоторой области последнее уравнение имеет решение

$y=y(p,\ C)$ или $p=p(y,\ C)$.

Тогда

$$\begin{cases} x=f(y(p,\ C),\ p), \\ y=y(p,\ C) \end{cases} \text{ или } x=f(y,\ p(y,\ C)),$$

что дает решение (1.1).

Замечание 2.3.1. Следует помнить, что в обоих случаях $p=p(x,c)$ и $p=p(y,c)$ есть вспомогательное переменное - параметр.

Исключая его из параметризации

$$x=X(u,v),\ y=Y(u,v),\ p=P(u,v), \qquad (2.2.1)$$

получаем решение

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1.1)$$

без дальнейшего интегрирования.

Если же, например, в случае 6.2.3.а) положить $p = \frac{dy}{dx}$ и рассматривать, полученное для p выражение, как ОДУ, то при интегрировании получили бы второе произвольное постоянное (исходное ДУ первого порядка!). И вместо решения исходного ОДУ нашли бы решение ОДУ второго порядка
$y' = f_x + f_{y'} y''$.

7.2.4. Особые решения.

Определение. Точка $(x_0, y_0, y_1) \in H \subset \mathbb{R}^3$ для ОДУ

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (2.4.1)$$

при условиях

$$F(x_0, y_0, y_1) = 0 \qquad (2.4.1а)$$

и

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \qquad (2.4.НУ)$$

называется

- ***точкой существования***, если через нее проходит хотя бы одна кривая ОДУ (2.4.1);
- ***точкой единственности***, если любые две интегральные кривые ОДУ (2.4.1), проходящие через нее, локально (вблизи нее) совпадают;
- ***точкой неединственности***, если некоторые два решения, проходящие через нее[1], локально (вблизи x_0) различны (т.е. не являются локально совпадающими).

Определение. Решение ОДУ (2.4.1) называется ***особым***, если каждая его точка является точкой неединственности.

Определение. Точка $(x_0, y_0, y_1) \in H \subset \mathbb{R}^3$ для ОДУ (2.4.1) при условиях (2.4.1а) и (2.4.НУ) называется

- ***обыкновенной***, если через нее проходит единственная интегральная кривая ОДУ (2.4.1);
- ***особой***, если она не является обыкновенной для данного ОДУ.

Особое решение, состоящее из особых точек, состоит из точек существования (это решение), но неединственности (не обыкновенных, т.е. особых).

Определение. Геометрическое место точек $(x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$, для которых система

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0 \end{cases}$$

[1] т.е. удовлетворяющие условиям (2.4.1а) и (2.4.НУ)

разрешима, называется ***p*-дискриминантным множеством**.

Если p-дискриминантное множество является кривой, ее называют ***p*-дискриминантной кривой**.

Покажем, что любое особое решение содержится в p-дискриминантном множестве, т.е. там, где нарушаются условия **теоремы существования и единственности** <u>для уравнений, не разрешенных относительно производной</u> (лекция 5): $F'_p(x,\, y,\, p) \neq 0$.

Утверждение 2.4.1. Пусть $y = \varphi(x)$ - особое решение ДУ (2.4.1),

где $F(x,\, y,\, p)$, $F'_y(x,\, y,\, p)$, $F'_p(x,\, y,\, p)$ - непрерывны в $H \subset \mathbb{R}^3_{xyp}$.

Тогда $\begin{cases} F(x,\, \varphi(x),\, \varphi'(x)) = 0, \\ F'_{\varphi'(x)}(x,\, \varphi(x),\, \varphi'(x)) = 0, \end{cases}$

т.е. $\varphi(x)$ - p-дискриминантная кривая, т.е. принадлежит p-дискриминантному множеству.

○ Доказательство "от противного":

$\varphi(x)$ - особое решение, т.е. решение и $F(x,\, \varphi(x),\, \varphi'(x)) = 0$.

$\forall x = x_0 \in I \subset H$ имеем $F(x_0,\, \varphi(x_0),\, \varphi'(x_0)) = 0$.

Предположим, что $\dfrac{\partial}{\partial \varphi'} F(x_0,\, \varphi(x_0),\, \varphi'(x_0)) \neq 0$.

Тогда по **теореме существования и единственности** <u>для уравнений, не разрешенных относительно производной</u> (лекция 5) найдется окрестность точки $(x_0,\, y_0,\, y_1) \in G$, где $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \varphi'(x_0)$, в которой решение существует и единственно.

Но $\varphi(x)$ - особое решение, поэтому любая точка $(x_0,\, y_0,\, y_1)$ для него - точка неединственности.

Следовательно, наше предположение неверно, и $\dfrac{\partial}{\partial \varphi'} F(x_0,\, \varphi(x_0),\, \varphi'(x_0)) = 0$.

Т.е. кривая $\varphi(x)$ принадлежит p-дискриминантному множеству.

●

Замечание 2.4.1. Т.о., любое особое решение содержится в p-дискриминантном множестве.

Однако p-дискриминантная кривая не обязана быть особым решение, хотя все ее точки особые.

Пример 2.4.1. $(y')^2 - (y+1)y' + y = 0$.

□ $\begin{cases} F(x,\, y,\, p) = p^2 - p(y+1) + y = 0, \\ F'_p(x,\, y,\, p) = 2p - (y+1) = 0. \end{cases}$

Из 2-го уравнения $p = \dfrac{y+1}{2}$.

Подставляя в 1-е, получим $\left(\frac{y+1}{2}\right)^2-(y+1)\frac{y+1}{2}+y=0$, т.е. $y=\frac{(y+1)^2}{4}$.

Решим это уравнение: $(y+1)^2-4y=0$. т.е. $(y-1)^2=0$ и

$\boxed{y=1}$ - p-дискриминантная кривая.

Но это <u>не решение</u>, так как $(1')^2-(1+1)1'+1=1\neq 0$.

■

Пример 2.4.2. Решить КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ $(y')^2-(y+1)y'+y=0$, $y(0)=0$, $y(2)=e$, если это возможно.

□ Уже знаем, что особых решений нет, т.к. p-дискриминантная кривая $y=1$ не является решением.

Решим уравнение:

$(y'-1)(y'-y)=0$.

① $y_1'=1$ ОДУ 1-го порядка.

$y_1(x)=x+C$ - его решение (общее).

$y(0)=0$ → $y_{11}(x)=x$, $y_{11}(2)=2\neq e$. ☹

$y(2)=e$ → $y_{12}(x)=x+e-2$, $y_{12}(0)=e-2\neq 0$. ☹

② $y_2'=y$ ОДУ 1-го порядка.

$y_2(x)=Ce^x$ - его решение (общее).

$y(0)=0$ → $C=0$ и $y_{21}(x)=0$, $y_{21}(2)=0\neq e$. ☹

$y(2)=e$ → $C=\frac{1}{e}$ $y_{22}(x)=e^{x-1}$, $y_{22}(0)=\frac{1}{e}\neq 0$. ☹

Делать вывод о том, что краевая задача не имеет решения преждевременно, так как есть p-дискриминантное множество $y=1$.

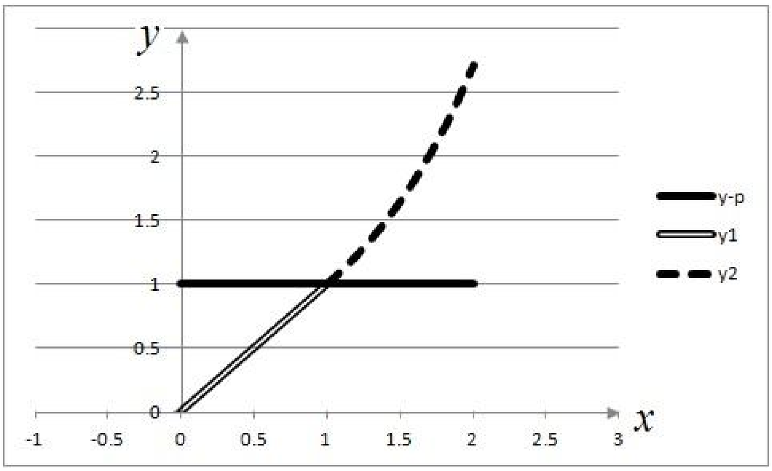
Заметим, что $y_{11}(1)=1$ и $y_{22}(1)=e^{1-1}=1$, т.е. $y_{11}(1)=y_{22}(1)$.

Проверим касание в точке $(1,1)$ этих решений (решение краевой задачи должно быть непрерывно дифференцируемо):

$y_{11}'(x)=1$,

$y_{22}'(x)=e^{x-1}$, т.е. $y_{22}'(1)=e^{1-1}=1$,

и $y_{11}'(1)=y_{22}'(1)$.



Т.о. $y(x)=\begin{cases} x, & x\in[0.\,1], \\ e^{x-1}, & x\in[1,\,2] \end{cases}$ - решение поставленной задачи.

■

Алгоритм решения задач на поиск особых решений:

❶. Найти решение (2.4.1).

❷. Найти p-дискриминантное множество, исключив параметр p из системы $\begin{cases} F(x,y,p)=0, \\ \dfrac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0. \end{cases}$

❸. Отобрать те p-дискриминантные кривые, которые являются решением (2.4.1): $y_p(x)$.

❹. Для отобранных решений проверить выполнение определения особого решения, т.е. проверить выполнение при $\forall x_0\in I$ условий касания $\begin{cases} y_p(x_0)=y(x_0,C) \\ y'_p(x_0)=y'(x_0,C) \end{cases}$, где $y(x,C)$ - однопараметрическое семейство решений (2.4.1), не совпадающих с $y_p(x)$.

Примеры решения задач см в

🕮 В.М. Ипатова, О.А. Пыркова, В.Н. Седов. Дифференциальные уравнения. Методы решений: - Учебное пособие.

7.2.5. Уравнение Лагранжа.

Это линейное по x и по y, не разрешенное относительно производной ОДУ

$$A(y')y+B(y')x=C(y'),\qquad(2.5.1)$$

где A, B, C - дифференцируемые функции производной $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

Пусть, например, $A(y')\neq 0$:

$$y=\varphi(y')x+\psi(y')\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} y=\varphi(p)x+\psi(p), \\ dy=pdx. \end{cases}$$

Дифференцируем первое уравнение системы:

$$dy=\varphi(p)dx+\left(\varphi'_p(p)x+\psi'_p(p)\right)dp.$$

С учетом второго уравнения системы, получаем:

$$pdx=\varphi(p)dx+\left(\varphi'_p(p)x+\psi'_p(p)\right)dp$$

или

$$(\varphi(p)-p)dx+\left(\varphi'_p(p)x+\psi'_p(p)\right)dp=0.$$

① Если $\underline{\varphi(p)\neq p}$, то

$$x'_p+\frac{\varphi'_p(p)}{(\varphi(p)-p)}x=-\frac{\psi'_p(p)}{(\varphi(p)-p)}$$ - ЛОДУ 1-го порядка.

Его решение находится двумя квадратурами (лекция 3)

$$x=C\alpha(p)+\beta(p),$$

где $\alpha(p)=e^{-\int\limits_{p_0}^{p}\frac{\varphi'_\xi(\xi)}{(\varphi(\xi)-\xi)}d\xi}$ - общее решение одродного ЛОДУ,

$$\beta(p)=-e^{-\int\limits_{p_0}^{p}\frac{\varphi'_\xi(\xi)}{(\varphi(\xi)-\xi)}d\xi}\int\limits_{p_0}^{p}\frac{\psi'_p(\eta)}{(\varphi(\eta)-\eta)}e^{\int\limits_{p_0}^{\eta}\frac{\varphi'_\xi(\xi)}{(\varphi(\xi)-\xi)}d\xi}d\eta$$ - частное решение.

Решение уравнения Лагранжа

$$\begin{cases}x=C\alpha(p)+\beta(p),\\ y=\varphi(p)x+\psi(p).\end{cases}$$

② В процессе решения мы делили уравнение на $(\varphi(p)-p)$, что может привести к потере решений вида

$p=p_k\ \ (k=1,2,\ldots)$,

где p_k - корни уравнения

$\varphi(p)-p=0$.

В этом случае получаем решения

$y=p_kx+\psi(p_k)$ - прямые.

Эти прямые могут быть как частными решениями, так и особыми (надо проверять).

7.2.6. Уравнение Клеро.

Частный (важный) случай уравнения Лагранжа при $\varphi(p)=p$:

$y=y'x+\psi(y')$ - (2.6.1)

уравнение Клеро.

Применяя метод введения параметра, получаем (см. пункт 6.2.5)

$(x+\psi'_p(p))dp=0$.

① $dp=0$ → $p=C=const$ и

$y_1=Cx+\psi(C)$ - однопараметрическое семейство решений.

② $x=-\psi'_p(p)$ или $p=\omega(x)$ →

$y_2=x\omega(x)+\psi(\omega(x))$ - не содержит произвольного постоянного и не получается из однопараметрического семейства решений.

Так как $\begin{cases}F(x,y,p)=px+\psi(p)-y=0,\\ F_p(x,y,p)=x+\psi'_p(p)=0,\end{cases}$

то y_2 - p-дискриминантная кривая.

Условия касания $\begin{cases}y_1=y_2,\\ y'_1=y'_2\end{cases}$ или $\begin{cases}\hat{C}\hat{x}+\psi(\hat{C})=\hat{x}\omega(\hat{x})+\psi(\omega(\hat{x})),\\ \hat{C}=\omega(\hat{x})+\hat{x}\omega'(\hat{x})+\psi'_\omega(\omega(\hat{x}))\omega'(\hat{x})\end{cases}$ выполнены

при $\hat{C}=\omega(\hat{x})$.

Т.е. y_2 - особое решение.

Пример 2.6.1. Исследовать особые решения $y = xy' + (y')^2$. Нарисовать качественную картину поведения интегральных кривых.

☐ В **примере 2.3.1** нашли решение

$y_1 = Cx + C^2$ и

$y_2 = -\frac{x^2}{4}$.

для внимательных

$y = xy' + (y')^2$ уравнение вида (2.6.1)

$y = y'x + \psi(y')$, т.е это уравнение Клеро.

Следовательно, решение $y_2 = -\frac{x^2}{4}$ - особое.

для остальных

p-дискриминантное множество:

$$\begin{cases} xp + p^2 - y = 0, \\ x + 2p = 0. \end{cases}$$

Из 2-го уравнения $p = -\frac{x}{2}$.

Подставляя в 1-е, получим

$x\left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 - y = 0$, т.е.

$y_p = -\frac{x^2}{4}$ - *p*-дискриминантная кривая, являющаяся решением ОДУ.

Проверяем касание при $x = \hat{x}$:

$$\begin{cases} \hat{C}\hat{x} + \hat{C}^2 = -\frac{\hat{x}^2}{4}, \\ \hat{C} = -\frac{\hat{x}}{2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения

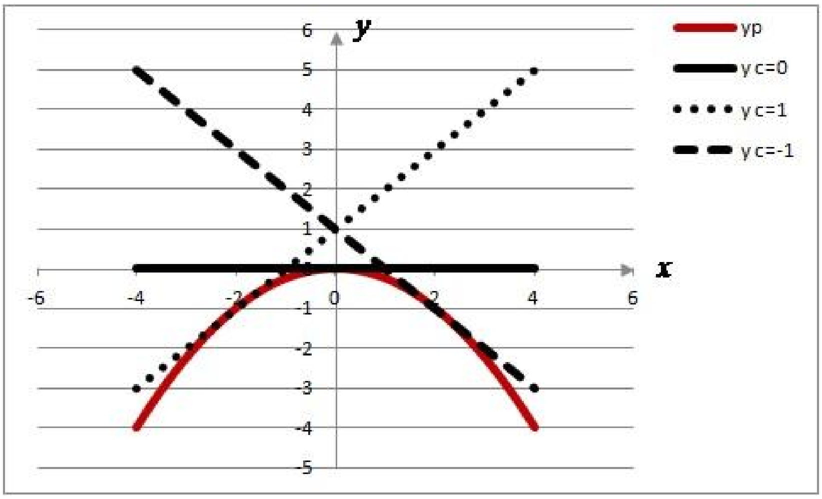
$\hat{C} = -\frac{\hat{x}}{2}$.

Подставляя в первое, получаем

$\hat{x}\left(-\frac{\hat{x}}{2}\right) + \left(-\frac{\hat{x}}{2}\right)^2 = -\frac{\hat{x}^2}{4}$.

Т.о.,

$y_1 = -\frac{x^2}{4}$ - особое решение.



■

Гл. II. Линейные ОДУ *n*-го порядка с постоянными коэффициентами.

§1. Общая теория ЛОДУ.

Вспоминаем (Лекция 3 § 3):

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x) = b(x) \tag{1.1}$$

$$Ly = b(x), \tag{1.1a}$$

где $L = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \dfrac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}$ - линейный дифференциальный оператор (см. гл. I §3 - л. 3).

$x \in I$

$a_k(x) \in C(I)$, $a_0(x) \neq 0 \ \ \forall x \in I$, $\quad b(x) \in C(I)$.

Пример 1.1. $a_0(x) \neq 0$ существенно:

□ $x^2 y'' - 2y = 0$.

Из ДУ $y(0) = 0$,

Решение ДУ $y = C_1 x^2 + \dfrac{C_2}{x}$ при $x \neq 0$.

■

Полезно вспомнить принципы суперпозиции (лекция 3 §3).

Определение. Будем говорить, что функции $u_1(x), \dots, u_p(x)$ ***линейно зависимы*** на промежутке I, если $\exists C_j = const$, $\overline{j = 1, p}$ не все равные нулю: $\sum_{j=1}^{p} (C_j)^2 \neq 0$, - такие, что имеет место тождество

$$\sum_{j=1}^{p} C_j u_j(x) \equiv 0. \ \forall x \in I \tag{1.2}$$

В противном случае (т.е. если $\forall x \in I$ (1.2) выполняется только при $C_j = 0$, $\overline{j = 1,\ p}$) будем говорить, что функции $u_1(x), \ldots , u_p(x)$ ***линейно независимы***.

!!! постоянные C_j, $\overline{j = 1,\ p}$ одни и те же для всего промежутка I !!!

Определение. Определителем Вронского (вронскианом) системы функций $y_1(x), y_2(x), \ldots , y_n(x)$ назовем детерминант

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Будем сначала рассматривать однородные ЛОДУ

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x) = 0 \qquad (1.3)$$

или

$$Ly = 0 \qquad (1.3а)$$

Теорема 1.1. Если решения (3) ((3а)) линейно зависимы на I, их вронскиан $W(x) \equiv 0$ на I.

Замечание 1.1. Эта теорема может быть сформулирована следующим образом: Если функции линейно зависимы на I, их вронскиан $W(x) \equiv 0$ на I.

Т.е. верна как для решений (3), так и для <u>произвольных функций</u>, обладающих достаточной гладкостью.

○ Согласно определению линейной зависимости $y_1(x), \ldots , y_m(x)$, $1 < m \le n$

$\exists C_j = const$, $\overline{j = 1,\ m}$: $\sum_{j=1}^{m} (C_j)^2 \ne 0$ и

$$\sum_{j=1}^{m} C_j y_j(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in I.$$

Дифференцируя это тождество $(m-1)$ раз, получаем

$$\sum_{j=1}^{m} C_j y_j'(x) \equiv 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{m} C_j y_j^{(m-1)}(x) \equiv 0.$$

$\forall x \in I$ эти соотношения можно рассматривать как систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1, \ldots , C_m$.

Эта система имеет нетривиальное решение $\Leftrightarrow$ когда ее определитель равен нулю, т.е. $W(x) = 0$ $\forall x \in I$.

Ч.т.д.

●