Лекция 7.

Гл. II. Линейные ОДУ *n*-го порядка с постоянными коэффициентами.

§1. Общая теория ЛОДУ.

(продолжение)

Следствие (теоремы 1.1). Решения ДУ (3) ((3а)) линейно независимы на I, если $\exists x_0 \in I: W(x_0) \neq 0$.

Замечание 1.2. Это следствие может быть сформулирована следующим образом:
Функции линейно независимы на I, если $\exists x_0 \in I: W(x_0) \neq 0$.
Т.е. верно как для решений (3), так и для произвольных функций, обладающих достаточной гладкостью.

○ Доказательство "от противного":
Пусть $y_1(x), \dots, y_m(x)$, $1 < m \le n$ линейно зависимы на I,
т.е. $\exists C_j = const$, $\overline{j=1,\, m}$: $\sum_{j=1}^{m} (C_j)^2 \neq 0$ и

$$\sum_{j=1}^{m} C_j y_j(x) \equiv 0 \quad \forall x \in I.$$

По теореме 1.1. $W(x) \equiv 0$ на I, т.е. и $W(x_0) = 0$, что противоречит условию.
Следовательно предположение неверно,
и $y_1(x), \dots, y_m(x)$, $1 < m \le n$ линейно независимы.
●

Пример 1.2.[1] Детерминант Вронского для функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ равен нулю при всех x.
Могут ли эти функции быть линейно зависимыми?
Линейно независимыми?

□ Чуть позже (**теорема 1.2**) докажем, что если эти функции являются решениями однородного ЛОДУ n-го порядка, то они линейно зависимы.
Если это не так, то ничего не можем сказать:

① $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = 2x$ - линейно зависимы: $2y_1 - y_2 = 0$.

$$W_{y_1,\, y_2}(x) = \begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ \forall x$$ (что и следовало ожидать по **теореме 1.1**).

② $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) = |x|x$ - линейно независимы на $I = [-1,\, 1]$.

при $x < 0$ $W_{y_1,\, y_2}(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = 0$,

$W_{y_1,\, y_2}(0) = 0$,

при $x > 0$ $W_{y_1,\, y_2}(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0$.

---
[1] Ф665

Заметим, что $y_1(x) = x^2 \in C^2(I)$,

а $y_2(x) = |x|x \in C^1(I)$: $y_2(x) = \begin{cases} x^2, \ x > 0, \\ 0, \ x = 0, \\ -x^2, \ x < 0, \end{cases}$ $y_2'(x) = \begin{cases} 2x, \ x > 0, \\ 0, \ x = 0, \\ -2x, \ x < 0. \end{cases}$

■

Постановка **ЗАДАЧИ КОШИ** для ЛОДУ (1.1) ((1.1a)):
Найти решение ЛОДУ (1.1) на I, если $x_0 \in I$
и выполнены **начальные условия**

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad (1.4)$$

Приведем пока только формулировку теоремы существования и единственности для ЛОДУ. Докажем в общем случае позже - лекция 14, в случае СЛОДУ с постоянными коэффициентами, к которым сводится ЛОДУ с постоянными коэффициентами (см. **замечание 1.2** лекции 10) - докажем **теорему 4.2** (лекция 13).

Теорема существования и единственности.
Если $a_k(x) \in C(I),\ a_0(x) \neq 0 \ \ \forall x \in I$, $\quad b(x) \in C(I)$,
то решение задачи Коши (1.1)-(1.4) существует и единственно.

Теорема 1.2. Пусть $y_1, \dots, y_n$ решения (1.3) ((1.3a)) n-го порядка на I.
Если $\exists x^* \in I$: $W(x^*) = 0$, то эти решения линейно зависимы на I.

○ $W(x^*) = 0$, т.е. его столбцы линейно зависимы,

следовательно, $\exists C_j = const$, $\overline{j = 1, n}$: $\sum\limits_{j=1}^{n} (C_j)^2 \neq 0$ и

$$\sum_{j=1}^{n} C_j \begin{pmatrix} y_j(x^*) \\ y_j'(x^*) \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)}(x^*) \end{pmatrix} \equiv 0$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_j^{(l)}(x^*) \equiv 0,\ l = \overline{0, (n-1)}.$$

Рассмотрим функцию $y(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j y_j(x)$:

- это решение ЛОДУ (1.3)
- с начальными данными $\begin{pmatrix} y(x^*) \\ y'(x^*) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x^*) \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Но функция $y(x) = 0$ является решением поставленной задачи Коши.

По теореме существования и единственности других решений нет, следовательно $y_1, \ldots, y_n$ - линейно зависимы.●

Следствие (теоремы 1.2 - альтернатива вронскиана).

Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ - решения однородного ЛОДУ (1.3) n-го порядка. Тогда $\forall x \in I$

$$W(x)\begin{cases} \equiv 0 & \Leftrightarrow y_1(x), \ldots, y_n(x) \quad -\textit{линейно зависимы}, \\ \neq 0 & \Leftrightarrow y_1(x), \ldots, y_n(x) \quad -\textit{линейно независимы.} \end{cases}$$

Замечание1.3. В Теореме 2 именно <u>n</u> решений для уравнения <u>n-го</u> порядка.

Рассмотрим ОДУ $y^{IV} = 0$.

Оно легко интегрируется: $y''' = C_1$, $y'' = C_1 x + C_2$, $y' = C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$,

$y = C_1 \dfrac{x^3}{6} + C_2 \dfrac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$.

Таким образом , $y = D_1 x^3 + D_2 x^2 + D_3 x + D_4$ - решение.

Рассмотрим $y_1 = x^3$ и $y_2 = x^2$ при $x \in I = [-1, 1]$.

Вронскиан $W(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ 3x^2 & 2x \end{vmatrix}$. $W(0) = 0$, но $y_1 = x^3$ и $y_2 = x^2$ линейно независимы на I.

Для $y_1 = x^3$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x$ и $y_4 = 1$ при $x \in I = [-1, 1]$ вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 3x^2 & 2x & 1 & 0 \\ 6x & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$W(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$ согласно теории.

Определение. ***Фундаментальной системой решений*** (ФСР) однородного ЛОДУ (1.3) будем называть любые n линейно независимых решений (1.3).

Теорема 3. Однородное ЛОДУ (3) ((3a)) имеет ФСР.

○ Определим n решений однородного ЛОДУ (1.3) так, чтобы они удовлетворяли следующим начальным условиям при $x_0 \in I$:

$y_k(x_0) = \delta_{k1}$,
$y_k'(x_0) = \delta_{k2}$,
$\vdots$

$y^{(n-1)}{}_k(x_0) = \delta_{kn}$, $k = \overline{1, n}$.

Здесь $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0 & k \neq j \end{cases}$ - дельта символ Кронекера.

Тогда $W(x_0) = \det E = 1$.

Поэтому по следствию **теоремы 1.1** $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимы, т.е. образуют ФСР.

●

Замечание 1.4. При доказательстве теоремы в качестве НУ для построения $y_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, можно выбирать k-ый столбец любой невырожденной матрицы $A_{n\times n}$.

Поскольку существует бесконечно много матриц размера $n \times n$, определитель которых отличен от нуля, то для каждого однородного ЛОДУ (1.3) существует бесконечно много ФСР.

Кроме того, линейное невырожденное преобразование

$$\tilde{y}_k(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} y_k(x)$$

переводит одну ФСР в другую.

Аналогию с базисом в n - мерном пространстве решений завершает следующая теорема

Теорема 1.4. Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ ФСР однородного ЛОДУ (1.3), то любое его решение $y = \varphi(x)$ представимо в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x), \tag{1.5}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ - произвольные постоянные.

○ Пусть $\varphi(x)$ такое решение (1.3), что для $x_0 \in I$

$$\begin{aligned} &\varphi(x_0) = \hat{y}_0, \\ &\varphi'(x_0) = \hat{y}_1, \\ &\quad\vdots \\ &\varphi^{(n-1)}(x_0) = \hat{y}_{n-1}. \end{aligned} \tag{НУ}$$

Рассмотрим $\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$. Согласно принципу суперпозиции это решение ЛОДУ (1.3).

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x_0) = \hat{y}_0, \\ \quad\vdots \\ \sum_{k=1}^{n} C_k y^{(n-1)}{}_k(x_0) = \hat{y}_{n-1} \end{cases}$$ - система относительно $C_1, \ldots, C_n$.

Она имеет единственное решение в силу того, что $W(x_0) \neq 0$.

Следовательно, $\tilde{y}(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$ удовлетворяет (НУ).

По **теореме существования и единственности** решение задачи Коши (1.3) - (НУ) единственно,

т.о., $\tilde{y}(x)\equiv\varphi(x)$,

т.е. $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$, ч.т.д.

●

Замечание1.5. $y(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$, где $C_k = const$, $k=\overline{1, n}$, а $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ - ФСР,

есть <u>общее решение</u> однородного ЛОДУ (1.3):

- эта формула содержит все решения (1.3),
- любое решение (1.3) представимо этой формулой.

Вернемся к неоднородному ЛОДУ (1.1).

Теорема 1.5. Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ ФСР однородного ЛОДУ (1.3),

а $y_p(x)$ - частное решение неоднородного ЛОДУ (1.1) ((1.1a)),

то любое решение (1.1) ((1.1a)) представимо в виде

$$y(x)=y_p(x)+\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x), \tag{1.6}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ - произвольные постоянные.

○ Рассмотрим $\hat{y}(x)=y(x)-y_p(x)$ - разность решений (1.1) ((1.1a)).

По ПС2 (лекция 3) $L\hat{y}(x)=0$,

т.е. $\hat{y}(x)$ - решение однородного ЛОДУ (1.3).

Следовательно, по **теореме 1.4** $\hat{y}(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$.

Откуда $y(x)=y_p(x)+\hat{y}(x) = y_p(x)+\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$.

Ч.т.д.

●

Замечание 1.6. Теорема 1.5 справедлива при любом выборе частного решения $y_p(x)$.

Замечание 1.7. Теорему 1.5 можно сформулировать следующим образом:

Общее решение неоднородного ЛОДУ есть сумма

- частного решения неоднородного ЛОДУ и
- общего решения однородного ЛОДУ.

<u>Алгоритм построения решения</u> ЛОДУ (1) ((1a)):

❶ находим ФСР,

❷ находим частное решение (1.1),
❸общее решение (1.1) строим по формуле (1.6).

Теорема 1.6. (метод вариации произвольных постоянных - метод Лагранжа)

Если известна ФСР соответствующего (1.1) однородного ЛОДУ (1.3), то общее решение неоднородного ЛОДУ (1.1) может быть найдено при помощи квадратур.

○ $a_0(x)\neq 0 \ \ \forall x\in I$

Разделим тогда в (1.1) все коэффициенты и правую часть на $a_0(x)$:

$d_k(x)=\dfrac{a_k(x)}{a_0(x)},\ k=\overline{1,\,n},\ f(x)=\dfrac{b(x)}{a_0(x)}$.

Неоднородное ЛОДУ (1.1) примет вид

$$y^{(n)}(x)+\sum_{k=1}^{n}d_k(x)y^{(n-k)}(x)=f(x), \tag{1.1б}$$

а однородное ЛОДУ (1.3)

$$y^{(n)}(x)+\sum_{k=1}^{n}d_k(x)y^{(n-k)}(x)=0. \tag{1.3б}$$

Общее решение (1.3б) имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k y_k(x),$$

где $C_1,\ \ldots\ ,\ C_n$ - произвольные постоянные,
а $y_1(x),\ \ldots\ ,\ y_n(x)$ - ФСР (1.3б).

<u>Цель</u>: получить решение (1.1б) в форме (1.5), но при $C_k=C_k(x),\ k=\overline{1,\,n}$:

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k(x)y_k(x).$$

- Получили n неизвестных функций,
- для определения которых надо n уравнений.

Одно уже есть - (1.1б): $\underline{\left(\sum_{k=1}^{n}C_k(x)y_k(x)\right)^{(n)}+\sum_{j=1}^{n}d_j(x)\left(\sum_{k=1}^{n}C_k(x)y_k(x)\right)^{(n-j)}=f(x)}$.

Встает вопрос: как получить остальные?
Можем задать произвольно, но будем задавать так, чтобы выражения для производных имели наиболее простой вид:

① $y'(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k'(x)y_k(x)+\sum_{k=1}^{n}C_k(x)y_k'(x)$.

1-е: $\underline{\sum_{k=1}^{n}C_k'(x)y_k(x)=0}$,

и $y'(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k(x)y_k'(x)$ - как и в случае $C_k=const$, $k=\overline{1,\,n}$.

② $y''(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k'(x)y_k'(x)+\sum_{k=1}^{n}C_k(x)y_k''(x)$.

2-е: $\underline{\sum_{k=1}^{n}C_k'(x)y_k'(x)=0}$, и $y''(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k''(x)$.

И т.д.

◎ $(n-1)$-е $\underline{\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-2)}(x)=0}$,

и $y^{(n-1)}(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k^{(n-1)}(x)$.

И, наконец

$$y^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)}(x)+\sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k^{(n)}(x).$$

Подставим все полученные таким образом $y^{(m)}(x)$, $m=\overline{1, n}$ в (1.1б):

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)}(x)+\sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k^{(n)}(x)+\sum_{j=1}^{n} d_j(x)\left(\sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k^{(n-j)}(x)\right)=f(x),$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)}(x)+\sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k^{(n)}(x)+\sum_{k=1}^{n} C_k(x)\left(\sum_{j=1}^{n} d_j(x) y_k^{(n-j)}(x)\right)=f(x),$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)}(x)+\sum_{k=1}^{n} C_k(x)\left(y_k^{(n)}(x)+\sum_{j=1}^{n} d_j(x) y_k^{(n-j)}(x)\right)=f(x).$$

По условию $y_k(x)$, $k=\overline{1, n}$ образуют ФСР,

поэтому $y_k^{(n)}(x)+\sum_{j=1}^{n} d_j(x) y_k^{(n-j)}(x)=0$, $k=\overline{1, n}$.

Следовательно,

$$\underline{\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)}(x)=f(x).}$$

Таким образом, получили систему относительно $C_k'(x)$, $k=\overline{1, n}$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k(x)=0, \\ \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k'(x)=0, \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-2)}(x)=0, \\ \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)}(x)=f(x) \end{cases}, \text{ или } W(x)\begin{pmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_{n-1}' \\ C_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

$W(x)\neq 0$ $\forall x\in I$, следовательно, находятся $C_k'(x)=h_k(x)$, $k=\overline{1, n}$, единственным образом.

И квадратурами находим

$C_k(x)=\int h_k(x)dx+\widetilde{C}_k$,

где $\widetilde{C}_k$, $k=\overline{1, n}$, - новые произвольные постоянные.

Подставляя найденные значения $C_k(x),\ k=\overline{1,\ n}$, в (1.5), получаем

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k y_k(x)+\sum_{k=1}^{n}y_k(x)\int h_k(x)dx.$$

По построению это решение неоднородного ЛОДУ (1.1б):

$\sum_{k=1}^{n}\tilde{C}_k y_k(x)$ - общее решение однородного ЛОДУ (1.3б),

$\sum_{k=1}^{n}y_k(x)\int h_k(x)dx$ - частное решение неоднородного ЛОДУ (1.1б).

●