Лекция 8.

Гл. II. Линейные ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.

§2. Однородные ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

❶ Знание ФСР обеспечивает возможность найти любое решение однородного ЛОДУ.
❷ Решение неоднородного ЛОДУ можно найти методом вариации постоянных (применением квадратур).

Существование ФСР доказано, остается пока открытым вопрос о ее нахождении.

☺ Для ЛОДУ с постоянными коэффициентами нахождение ФСР сводится к алгебраическим операциям, а именно, к решению алгебраического уравнения n-ой степени.

Пусть $x \in I \subset \mathbb{R}_x^1$.

Рассмотрим однородное ЛОДУ с постоянными коэффициентами $a_k = const \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0,\, n}$, $a_0 \neq 0 \ \ \forall x \in I$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)}(x) = 0 \qquad (2.1)$$

Замечание 2.1. Здесь $y(x) \in C^{(n)}(I)$ - вообще говоря, комплекснозначная функция, n раз непрерывно дифференцируемая.

Замечание 2.2. Так как $a_0 \neq 0$, то (2.1) или (2.1а) можно отнормировать, разделив все коэффициенты на a_0. Поэтому, если не оговорено противное, в дальнейшем будем полагать, что $a_0 = 1$

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(n-k)}(x) = 0 . \qquad (2.1н)$$

(2.1н) в операторной записи

$$Ly = 0 , \qquad (2.1а)$$

где

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \ \text{-} \qquad (2.2)$$

линейный дифференциальный оператор (см. гл. I §3 - лекция 3).

Вспомним ОДУ 1-го порядка:

$$y' + a_1 y = 0 .$$

Его решение (общее)[1]
$y = Ce^{-a_1 x}$.

Будем решение (2.1н) искать в виде
$y = e^{\lambda x}$.

Получим:

$$y' = \lambda e^{\lambda x},$$
$$\vdots$$
$$y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x},$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Подставляя полученные производные решения в (2.1а), получим

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^n + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k}\right) = 0.$$

Определение. Полином

$$M(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k}$$

называется ***характеристическим полиномом*** однородного ЛОДУ (2.1н) (или (2.1а)),
а уравнение

$$M(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k} = 0 \text{ -} \qquad (2.3)$$

характеристическим уравнением для однородного ЛОДУ (2.1н) (или (2.1а))

По основной теореме алгебры характеристическое уравнение (2.3) имеет ровно n корней, вообще говоря, комплексных, с учетом их кратности.

Определение. Число λ_0 называется ***корнем кратности*** m уравнения (2.3), где $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le n$, если
$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m M_1(\lambda)$,
где $M_1(\lambda) = P_{n-m}(x)$ - полином степени $(n-m)$, $M_1(\lambda_0) \ne 0$.

Замечание 2.3. Из формулы Тейлора для $M(\lambda)$ следует, что λ_0 корень кратности m характеристического полинома $M(\lambda)$ $\Leftrightarrow$ $M(\lambda_0) = M'(\lambda_0) = \ldots = M^{(m-1)}(\lambda_0) = 0$, а $M^{(m)}(\lambda_0) \ne 0$.

---

[1] $y = 0$ - решение,

при $y \ne 0$: $\frac{dy}{y} = -a_1 dx$ → $\frac{dy}{y} = -a_1 dx$, интегрируя, получим $\ln|y| = -a_1 x + c$, $c \in \mathbb{R}$, или $|y| = e^{-a_1 x + c} = \hat{C}e^{-a_1 x}$, $\hat{C} > 0$.

Раскрывая знак модуля и учитывая, что $y = 0$ - решение, получим $y = Ce^{-a_1 x}$, где $C \in \mathbb{R}$.

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ - различные корни характеристического уравнения (2.3), а $m_1, \dots, m_p$ - их кратности, соответственно, то

$$M(\lambda) = \prod_{l=1}^{p} (\lambda - \lambda_l)^{m_l}, \qquad (2.4)$$

При этом: ❶ $\forall l = \overline{1,\ p} \quad 1 \le m_l \le n$,

❷ $\sum_{l=1}^{p} m_l = n$.

Определение. Число λ_0 называется простым корнем уравнения (2.3), если его кратность $m = 1$.

Для дальнейшего удобно ввести следующее обозначение оператора дифференцирования:

$$D = \frac{d}{dx}.$$

Так как

$$D^k = \left(\frac{d}{dx}\right)^k = \underbrace{\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \dots \frac{d}{dx}}_{k\ сомножителей} = \frac{d^k}{dx^k},$$

то в этих обозначениях (2.1а) принимает вид

$$Ly = M(D)y = 0.$$

Определение. Оператор $M(D)$ называется ***дифференциальным полиномом***.

Замечание 2.4. Дифференциальный полином $M(D)$ является линейным оператором (см. **лемму 3.1** лекции 3).

Замечание 2.5. Дифференциальный полином $M(D)$ имеет ту же структуру, что и характеристический полином $M(\lambda)$.

В дальнейшем нам понадобятся

ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ.

Рассмотрим линейные операторы

$$A(D) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j D^{k-j} = \alpha_0 D^k + \alpha_1 D^{k-1} + \dots + \alpha_k$$

и

$$B(D) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j D^{m-j} = \beta_0 D^m + \beta_1 D^{m-1} + \dots + \beta_m.$$

Здесь $\alpha_j = const$, $j = \overline{0,\ k}$,

$\beta_j = const$, $j = \overline{0,\ m}$.

Правило сложения:

$$[A(D)+B(D)]y = A(D)y + B(D)y .$$

$A(D)+B(D)$ - дифференциальный полином степени $n = \max\{k, m\}$.
$y \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^1_x)$.

Правило умножения:

$$A(D)[B(D)]y = [A(D)B(D)]y = [B(D)A(D)]y = B(D)[A(D)]y .$$

$A(D)B(D) = B(D)A(D)$ - дифференциальный полином степени $n = k + m$.
$y \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^1_x)$.

Проверяются непосредственной проверкой, как и
коммутативность,
ассоциативность,
дистрибутивность.

🕮 Федорюк. "Обыкновенные дифференциальные уравнения" - можно посмотреть доказательство для $k = m = 1$.

Отсюда, в частности, следует, что дифференциальные полиномы можно раскладывать на множители:
действительно, полином $M(\lambda)$ раскладывается на множители
а полиномы от символа D $(M(D))$ перемножаются по тем же правилам, что и полиномы от λ:

$$M(D) = \prod_{l=1}^{p}(D-\lambda_l)^{m_l} . \qquad (2.5)$$

Теорема 2.1. (Об общем решении ЛОДУ в случае простых корней характеристического полинома)

Пусть все корни характеристического уравнения простые (различные).
Тогда общее решение однородного ЛОДУ (2.1a) имеет вид

$$y = \sum_{k=0}^{n} C_k e^{\lambda_k x} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} .$$

○ Пусть λ_k, $k = \overline{1, n}$ - решения (различные) характеристического уравнения (2.3).
Пусть $y_k(x) = e^{\lambda_k x}$.

❶ Покажем, что $\forall k = \overline{1, n}$ $y_k(x)$ - решения (2.1a):

$$Ly_k(x) = M(D)y_k(x) = (D-\lambda_k)M_1(D)y_k(x) = M_1(D)[(D-\lambda_k)y_k(x)] =$$
$$= M_1(D)(Dy_k(x) - \lambda_k y_k(x))$$

Но $Dy_k(x) = \dfrac{d}{dx}y_k(x) = \dfrac{d}{dx}e^{\lambda_k x} = \lambda_k e^{\lambda_k x} = \lambda_k y_k(x)$.

Следовательно,

$$Ly_k(x) = M_1(D)\cdot 0 = 0,$$

т.е. $y_k(x)$ - решения (2.1a).

❷ Покажем, что $y_k(x)$. $k=\overline{1,\,n}$ образуют ФСР.

$$W(x) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k x}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{\,n-1} & \lambda_2^{\,n-1} & & \lambda_n^{\,n-1}\end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k x}\cdot\prod_{1\le j<i\le n}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)\neq 0.$$

Следовательно, по **теореме 1.4** лекции 7

$$y=\sum_{k=0}^{n} C_k y_k,$$

где C_k - произвольные постоянные.

●

Лемма 2.1. (***формула сдвига***)

Если $\lambda\in\mathbb{C}$, то $\forall y\in C^n\left(\mathbb{R}_x^1\right)$ справедлива формула $M(D)\left[e^{\lambda x}y(x)\right]=e^{\lambda x}M(D+\lambda)y(x)$.

○ $\forall k\in\mathbb{N}$ по формуле Лейбница

$$D^k\left[e^{\lambda x}y(x)\right] = \left(e^{\lambda x}y(x)\right)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j\left(e^{\lambda x}\right)^{(j)}\left(y(x)\right)^{(k-j)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j\lambda^j e^{\lambda x}\left(y(x)\right)^{(k-j)} =$$

$$= e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{k} C_k^j\lambda^j\left(y(x)\right)^{(k-j)} = e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{k} C_k^j\lambda^j D^{k-j}\left(y(x)\right) = e^{\lambda x}\left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j\lambda^j D^{k-j}\right)y(x) =$$

$$= e^{\lambda x}(\lambda+D)^k y(x) = e^{\lambda x}(D+\lambda)^k y(x).$$

Тогда

$$M(D)\left[e^{\lambda x}y(x)\right] = e^{\lambda x}(D+\lambda)^n y(x)+\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda x}a_k(D+\lambda)^{n-k}y(x) =$$

$$= e^{\lambda x}\left[(D+\lambda)^n+\sum_{k=1}^{n} a_k(D+\lambda)^{n-k}\right]y(x) = e^{\lambda x}M(D+\lambda)y(x).$$

●

Теорема 2.2. (О решениях ЛОДУ в случае кратного корня характеристического полинома).

Если $\lambda=\lambda_0\in\mathbb{C}$ корень кратности m характеристического уравнения (2.3), то каждая из функций вида

$e^{\lambda_0 x},\ xe^{\lambda_0 x},\ x^2e^{\lambda_0 x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\lambda_0 x}$

является решением однородного ЛОДУ (2.1a).

○ Пусть $y(x)=x^je^{\lambda_0 x}$, $j=\overline{0,\,(m-1)}$.

$$Ly(x) = M(D)y(x) = M(D)\left(x^je^{\lambda_0 x}\right) = \left|\begin{matrix}\textit{по формуле сдвига}\\ \textit{лемма 2.1}\end{matrix}\right| = e^{\lambda_0 x}M(D+\lambda_0)x^j$$

$M(D) = (D-\lambda_0)^m M_1(D)$, M_1 - полином степени $(n-m)$.

$M(D+\lambda_0) = (D-\lambda_0+\lambda_0)^m M_1(D+\lambda_0) = D^m M_1(D+\lambda_0) = M_1(D+\lambda_0)D^m$.

Т.о.,

$Ly(x) = e^{\lambda_0 x} M_1(D+\lambda_0)D^m x^j$.

Но

$D^m x^m = m!$,

и

$D^m x^j = 0$, $j = \overline{0, (m-1)}$.

Т.е.

$Ly(x) = e^{\lambda_0 x} M_1(D+\lambda_0)\cdot 0 = 0$,

т.о.,

$y(x) = x^j e^{\lambda_0 x}$, $j = \overline{0, (m-1)}$ - решения (2.1а), ч.т.д.

●

Определение. Функция вида

$$f(x) = e^{\mu x} P_m(x), \tag{2.6}$$

где $\mu \in \mathbb{C}$ - задано, а $P_m(x)$ - заданный полином степени m, вообще говоря, с комплексными коэффициентами, называется квазиполиномом.

Следствие (теоремы 2).

Если $\lambda = \lambda_0 \in \mathbb{C}$ корень кратности m характеристического уравнения (2.3), то квазиполином $e^{\lambda_0 x} P_{m-1}(x)$ является решением однородного ЛОДУ (2.1а).

○ По теореме 2.2 и принципу суперпозиции (теорема 3.1 лекции 3) следует справедливость вышеприведенного утверждения.

●

Лемма 2.2. При дифференцировании квазиполинома с $\mu \neq 0$ получаем квазиполином той же степени.

○ $f(x) = e^{\mu x} P_m(x)$, $\mu \neq 0$,

$P_m(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} \alpha_j x^{m-j}$, $\alpha_0 \neq 0$.

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x) = \frac{d^k}{dx^k}\left(e^{\mu x} P_m(x)\right) = \frac{d^k}{dx^k}\left(P_m(x) e^{\mu x}\right) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(P_m(x)\right)^{(l)} \left(e^{\mu x}\right)^{(k-l)} =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(P_m(x)\right)^{(l)} \mu^{k-l} e^{\mu x} = e^{\mu x} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(P_m(x)\right)^{(l)} \mu^{k-l} = e^{\mu x} Q_m(x),$$

где $Q_m(x) = \sum\limits_{l=0}^{k} C_k^l \left(P_m(x)\right)^{(l)} \mu^{k-l} = \sum\limits_{j=0}^{m} q_j x^{m-j}$,

причем $q_0 = \alpha_0 \mu^k$ возникает только при $l = 0$[2].

$\mu \neq 0$, $\alpha_0 \neq 0$ по условию, следовательно $q_0 \neq 0$.

[2] как коэффициент при x^m.

●

Теорема 2.3. (О ФСР однородного ЛОДУ).

Решения
$e^{\lambda_l x}$, $xe^{\lambda_l x}$, $x^2 e^{\lambda_l x}$, … , $x^{m_l - 1} e^{\lambda_l x}$, $l = \overline{1,\ p}$,
где λ_l - корень характеристического уравнения (2.3) кратности m_l,
$1 \le m_l \le n$, $\sum_{l=1}^{p} m_l = n$,
образуют ФСР однородного ЛОДУ (2.1а).

○ Надо показать, что
① их n
и
② они линейно независимы,
следовательно образуют ФСР по определению.

❶ Решений n по построению.

❷ Осталось показать линейную независимость.
Доказательство "от противного":
предположим, что они линейно зависимы.
Тогда найдутся полиномы

$$P_{\tilde{m}_l - 1}(x) = \sum_{j=0}^{\tilde{m}_l - 1} \alpha_{lj} x^{\tilde{m}_l - 1 - j}, \ 1 \le \tilde{m}_l \le m_l,$$

такие, что

$$\sum_{l=1}^{p} \sum_{j=0}^{\tilde{m}_l - 1} (\alpha_{lj})^2 \ne 0$$

и

$$\sum_{l=1}^{p} e^{\lambda_l x} P_{\tilde{m}_l - 1}(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}_x^1.$$

То есть не все $P_{\tilde{m}_l - 1}(x) \equiv 0$.

Пусть $P_{\tilde{m}_1 - 1}(x) \equiv / \equiv 0$ (всегда можно перенумеровать корни характеристического уравнения (2.3)).

Пусть $\alpha_{10} \ne 0$[3] $(1 \le \tilde{m}_1 \le m_1)$.

Умножим $\sum_{l=1}^{p} e^{\lambda_l x} P_{\tilde{m}_l - 1}(x)$ на $e^{-\lambda_p x}$. Получим

$$0 \equiv e^{-\lambda_p x} \sum_{l=1}^{p} e^{\lambda_l x} P_{\tilde{m}_l - 1}(x) \ \equiv \sum_{l=1}^{p-1} e^{(\lambda_l - \lambda_p)x} P_{\tilde{m}_l - 1}(x) + P_{\tilde{m}_p - 1}(x)$$

Продифференцируем полученное тождество m_p $(1 \le \tilde{m}_p \le m_p)$ раз (для надежности, так как степень полинома $P_{\tilde{m}_p - 1}(x)$ меньше равна m_p).

По **лемме 2.2** получим

$$0 \equiv \sum_{l=1}^{p-1} e^{(\lambda_l - \lambda_p)x} Q_{\tilde{m}_l - 1}(x)$$

---

[3] коэффициент при старшей степени $x^{\tilde{m}_1 - 1}$ полинома $P_{\tilde{m}_1 - 1}(x)$.

или, умножив на $e^{\lambda_p x}$,

$$0 \equiv \sum_{l=1}^{p-1} e^{\lambda_l x} Q_{\tilde{m}_l - 1}(x).$$

Проделывая аналогичную операцию (умножаем на $e^{-\lambda_{p-1} x}$, затем дифференцируем m_{p-1} раз), получим

$$0 \equiv \sum_{l=1}^{p-2} e^{\lambda_l x} \hat{Q}_{\tilde{m}_l - 1}(x).$$

Продолжая процесс далее, получим

$$0 \equiv e^{\lambda_1 x} S_{\tilde{m}_1 - 1}(x)$$

или

$0 \equiv S_{\tilde{m}_1 - 1}(x)$ -

полином степени $\tilde{m}_1$ $\left(1 \le \tilde{m}_1 \le m_1\right)$ с коэффициентом s_{10} при старшей степени $x^{\tilde{m}_1 - 1}$.

По построению

$$s_{10} = \alpha_{10}\left(\lambda_1 - \lambda_p\right)^{m_p}\left(\lambda_1 - \lambda_{p-1}\right)^{m_{p-1}} \cdots \left(\lambda_1 - \lambda_2\right)^{m_2} \ne 0.$$

Полученное противоречие приводит к выводу, что эти решения линейно независимы,

ч.т.д.

А n линейно независимых решений образуют ФСР.

●

Следствие (теоремы 3).

Общее решение однородного ЛОДУ (2.1а) имеет вид

$$y(x) = \sum_{l=1}^{p} e^{\lambda_l x} P_{m_l - 1}(x),$$

где λ_l - корень характеристического уравнения (2.3) кратности m_l,

$$P_{m_l - 1}(x) = \sum_{j=0}^{m_l - 1} \alpha_{lj} x^{m_l - 1 - j},\ \alpha_{lj} = const \in \mathbb{C},\ \alpha_{l\, m_l - 1} \ne 0\ \ \forall l = \overline{1,\ p}.$$

○ По **теореме 3** $y_{lj_l}(x) = e^{\lambda_l x} x^{j_l}$, $l = \overline{1,\ p}$, $j_l = \overline{0,\ m_l - 1}$, $1 \le m_l \le n$, $\sum_{l=1}^{p} m_l = n$, образуют ФСР.

По **теореме 1.4** лекции 7 $y(x) = \sum_{l=1}^{p} \sum_{j_l=0}^{m_l - 1} C_{lj_l} y_{lj_l}(x)$, $C_{lj_l} = const$, $l = \overline{1,\ p}$, $j_l = \overline{0,\ m_l - 1}$.

$$\sum_{j_l=0}^{m_l - 1} C_{lj_l} y_{lj_l}(x) = \sum_{j=0}^{m_l - 1} C_{lj} y_{lj}(x) = \sum_{j=0}^{m_l - 1} C_{lj} e^{\lambda_l x} x^{j_l} = e^{\lambda_l x} P_{m_l - 1}(x).$$

Ч.т.д.

●