УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

$$u_t = a^2 \Delta u + f(\vec{x}, t)$$

$(\vec{x}, t) \in G = \mathbb{R}^n \times (0; \infty)$,

$$f(\vec{x}, t) \in C(G)$$

Задача Коши

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(\vec{x}, t), \\ u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x}). \end{cases}$$

$u_0(\vec{x})$ - • непрерывна и
• ограничена.

🕮 👓 ✎ Уроев стр. 124.

ПРИНЦИП ДЮАМЕЛЯ

$$u(\vec{x},t)=\int\limits_0^t \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}\right)^n}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\vec{\xi},\tau)\exp\left(-\frac{\left|\vec{x}-\vec{\xi}\right|^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\vec{\xi}\right]d\tau+$$

$$+\frac{1}{\left(\sqrt{4\pi a^2 t}\right)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\vec{\xi})\exp\left(-\frac{\left|\vec{x}-\vec{\xi}\right|^2}{4a^2 t}\right)d\vec{\xi}$$

☹

$$u(\vec{x},t) = u_p + v,$$

где

$$(u_p)_t = a^2 \Delta u_p + f(\vec{x},t)$$

$$\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v, \\ v(\vec{x},0) = u_0(\vec{x}) - u_p(\vec{x},0) = v_0(\vec{x}). \end{cases}$$

$$v(\vec{x},t) = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi a^2 t}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} v_0(\vec{\xi}) \exp\left(-\frac{\left|\vec{x}-\vec{\xi}\right|^2}{4a^2 t}\right) d\vec{\xi}$$

🕮 👓 ✏ Уроев стр. 114 (пример 1), 117 (пример 2).

ПРИМЕР 1

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + \sin t, \\ u(\vec{x}, 0) = e^{-(bx)^2}. \end{cases}$$

①

$\boxed{u_p}$ $f(x,t) = \sin t = \sin t \cdot 1 = g(t) \cdot h(x)$, $h(x) = 1$, $\Delta h(x) = \Delta 1 = 0$ → $h(x)$ - с.ф. Δ.

$$u_p = w(t) \cdot 1$$

$w'(t) = \sin t$ **желательно** (но не обязательно) $w(0) = 0$ - НУ

$w(t) = -\cos t + c$

c=1 из **НУ**

$$\underline{u_p = 1 - \cos t}$$

$\boxed{v}$ $\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v, \\ v(\vec{x},0) = e^{-(bx)^2} \end{cases}.$ -корректировки НУ не потребовалось. ☺

$$\Delta e^{-(bx)^2} = \frac{d}{dx}\left(-2b^2 x e^{-(bx)^2}\right) = -2b^2 e^{-(bx)^2} + \left(2b^2 x\right)^2 e^{-(bx)^2}$$ ☹

☺ $$v(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(b\xi)^2} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right) d\xi$$

$$v(\vec{x},t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(b\xi)^2}\exp\left(-\frac{\left|x-\xi\right|^2}{4a^2t}\right)d\xi$$

$$e^{-(bx)^2}\exp\left(-\frac{\left|x-\xi\right|^2}{4a^2t}\right)=\exp\left(-\left[\frac{x^2-2x\xi+\xi^2}{4a^2t}+(b\xi)^2\right]\right)$$

$$\frac{x^2-2x\xi+\xi^2}{4a^2t}+(b\xi)^2=\frac{x^2}{4a^2t}+\frac{\xi^2\left(1+4a^2b^2t\right)-2x\xi+\frac{x^2}{\left(1+4a^2b^2t\right)}}{4a^2t}-\frac{\left(\frac{x^2}{\left(1+4a^2b^2t\right)}\right)}{4a^2t}=$$

$$=\frac{x^2-\left(\frac{x^2}{\left(1+4a^2b^2t\right)}\right)}{4a^2t}+\frac{\left(\xi\sqrt{1+4a^2b^2t}-\frac{x}{\sqrt{1+4a^2b^2t}}\right)^2}{4a^2t}=$$

$$=\frac{x^2 4a^2b^2t}{4a^2t\left(1+4a^2b^2t\right)}+\frac{\left(\xi\sqrt{1+4a^2b^2t}-\frac{x}{\sqrt{1+4a^2b^2t}}\right)^2}{4a^2t}$$

$$v(\vec{x},t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(b\xi)^2}\,\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}\right)d\xi$$

$$e^{-(bx)^2}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}\right)=\exp\left(-\left[\frac{x^2-2x\xi+\xi^2}{4a^2t}+(b\xi)^2\right]\right)=$$

$$=\exp\left(-\left[\frac{x^2b^2}{(1+4a^2b^2t)}+\frac{\left(\xi\sqrt{1+4a^2b^2t}-\frac{x}{\sqrt{1+4a^2b^2t}}\right)^2}{4a^2t}\right]\right) \quad \text{и}$$

$$v(\vec{x},t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}e^{-\frac{x^2b^2}{(1+4a^2b^2t)}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\left(\xi\sqrt{1+4a^2b^2t}-\frac{x}{\sqrt{1+4a^2b^2t}}\right)^2}{4a^2t}\right)d\xi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\left(\xi\sqrt{1+4a^2b^2t}-\frac{x}{\sqrt{1+4a^2b^2t}}\right)^2}{4a^2t}\right)d\xi = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\xi\sqrt{1+4a^2b^2t}-\dfrac{x}{\sqrt{1+4a^2b^2t}}}{\sqrt{4a^2t}}=\eta \\ d\xi=\dfrac{\sqrt{4a^2t}\,d\eta}{\sqrt{1+4a^2b^2t}} \end{array}\right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\eta^2\right)\frac{\sqrt{4a^2t}\,d\eta}{\sqrt{1+4a^2b^2t}} = \frac{\sqrt{4a^2t}}{\sqrt{1+4a^2b^2t}}\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\eta^2\right)d\eta} = \frac{\sqrt{4a^2t}}{\sqrt{1+4a^2b^2t}}\cdot\sqrt{\pi}$$

$$v(\vec{x},t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}e^{-\frac{x^2b^2}{\left(1+4a^2b^2t\right)}}\frac{\sqrt{4a^2t}}{\sqrt{1+4a^2b^2t}}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{e^{-\frac{x^2b^2}{\left(1+4a^2b^2t\right)}}}{\sqrt{1+4a^2b^2t}} \rightarrow \boxed{v(\vec{x},t)=\frac{e^{-\frac{x^2b^2}{\left(1+4a^2b^2t\right)}}}{\sqrt{1+4a^2b^2t}}}$$

Ответ: $u(\vec{x},t)=u_p+v=1-\cos t+\dfrac{e^{-\frac{x^2b^2}{\left(1+4a^2b^2t\right)}}}{\sqrt{1+4a^2b^2t}}$ ❶

ПРИМЕР 2

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(\vec{x},0) = xe^{-x^2}. \end{cases}$$

② $\boxed{1}$ Можно опять воспользоваться интегралом Пуассона.

$\boxed{2}$ Можно использовать замену искомой функции.

$\boxed{2}$

Для $\begin{cases} v_t = \Delta v, \\ v(\vec{x},0) = e^{-x^2} \end{cases}$ знаем $v(\vec{x},t) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{(1+4t)}}}{\sqrt{1+4t}}$.

заметим, что $\begin{cases} \dfrac{d}{dx} v_t = \dfrac{d}{dx} \Delta v, \\ \dfrac{d}{dx} v(\vec{x},0) = \dfrac{d}{dx} e^{-x^2} \end{cases}$ или $\begin{cases} (v_x)_t = \Delta(v_x), \\ v_x(\vec{x},0) = -2xe^{-x^2} \end{cases}$,

т.е. $u = \dfrac{v_x}{-2}$ = $v(\vec{x},t) = -\dfrac{\frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{(1+4t)}}}{2\sqrt{1+4t}}$ = $v(\vec{x},t) = -\dfrac{-2xe^{-\frac{x^2}{(1+4t)}}}{2(1+4t)\sqrt{1+4t}}$ = $v(\vec{x},t) = \dfrac{xe^{-\frac{x^2}{(1+4t)}}}{\left(\sqrt{1+4t}\right)^3}$ ❷

ПРИМЕР 3

Пусть $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, и $u_k(x_k,t)$ решение задачи Коши $\begin{cases} u_t=\Delta u, \\ u(x,0)=f_k(x_k), \end{cases}$ $k=1,2,\dots,n$.

Докажем, что функция $u(\vec{x},t)=\prod_{k=1}^{n} u_k(x_k,t)$ есть решение ЗК $\begin{cases} u_t=\Delta u, \\ u(\vec{x},0)=\prod_{k=1}^{n} f_k(x_k). \end{cases}$

③ 1) $n=1$ - верно.

2) Пусть верно при $n=m$: $u(x_1,x_2,\dots,x_m,t)=\prod_{k=1}^{m} u_k(x_k,t)=w(x_1,x_2,\dots,x_m,t)$.

$$w(x_1,x_2,\dots,x_m,0)=\prod_{k=1}^{m} f_k(x_k)$$

3) При $n=m+1$ предположим, что

$$u(x_1,x_2,\dots,x_m,x_{m+1},t)=\prod_{k=1}^{m+1} u_k(x_k,t)=w(x_1,x_2,\dots,x_m,t)\cdot u_{m+1}(x_{m+1},t).$$

$$\left(u(x_1,x_{m+1},t)\right)_t = w_t \cdot u_{m+1} + w\cdot\left(u_{m+1}\right)_t = \Delta_m w\cdot u_{m+1} + w\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_{m+1}}^2}u_{m+1}\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial {x_k}^2}w\right)\cdot u_{m+1} + w\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_{m+1}}^2}u_{m+1}\right) = \sum_{k=1}^{m+1}\frac{\partial^2}{\partial {x_k}^2}\left(w\cdot u_{m+1}\right) = \Delta_{m+1}u(x_1,x_{m+1},t).$$

❸

Для ВУ не работает: $\left(u_1\cdot u_2\right)_t = u_{1_t}\cdot u_2 + u_1\cdot u_{2_t}$,

но $\left(u_1\cdot u_2\right)_{tt} = u_{1_{tt}}\cdot u_2 + \underset{\uparrow \atop \text{МЕШАЕТ}}{\underline{2u_{1_t}\cdot u_{2_t}}} + u_1\cdot u_{2_{tt}}$