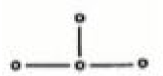
Исследуйте по сходимости схему Алена — Чена:

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=\frac{u_{m-1}^n-2u_m^{n+1}+u_{m+1}^n}{h^2}$$

для численного решения линейного одномерного уравнения теплопроводности.

- Схема для уравнения $u_t - u_{xx} = 0$ реализована на шаблоне  .
- *Явными* схемами называются такие разностные схемы для эволюционных уравнений, когда данные на следующем слое по времени находятся непосредственно из данных на предыдущем слое без решения алгебраических систем уравнений.
- Несмотря на то, что в правую часть входит значение функции u_m^{n+1}, вычисляемое на верхнем слое, разностное уравнение разрешается относительно u_m^{n+1}:

$$u_m^{n+1}=\frac{\tau\left(u_{m-1}^n+u_{m+1}^n\right)+h^2u_m^n}{\left(h^2+2\tau\right)}.$$

- **Определение 1**. Говорят, что решение $\mathbf{u}_\tau$ сходится к решению и при $\tau\to 0$, если $\left\|\mathbf{u}_\tau-\mathbf{U}_\tau\right\|\to 0,$ где $\mathbf{U}_\tau$ — проекция точного решения на разностную сетку; причем, если имеет место оценка $\left\|\mathbf{u}_\tau-\mathbf{U}_\tau\right\|\le c\tau^p,\ c\ne c(\tau),$ то сходимость имеет порядок *p*.
- **Теорема (П. Лакса – В. С. Рябенького)** Решение линейной разностной задачи *сходится* к решению дифференциальной, если разностная задача устойчива и аппроксимирует дифференциальную задачу на ее решении. При этом порядок аппроксимации совпадает с порядком сходимости.

Аппроксимация.

Определение 2. Говорят, что разностная задача аппроксимирует дифференциальную на ее решении, если норма невязки, возникающей при действии разностного оператора на сеточную функцию — проекцию на сетку точного решения

$$r_\tau=\mathbf{L}_\tau U_\tau-F_\tau$$

стремиться к нулю при $\tau\to 0;$ если выполнена оценка

$\left\|r_\tau\right\|\le c_k\tau^p,\quad c_k\ne c_1(\tau),$ (константа, входящая в правую часть неравенства не зависит от сеточных параметров), то имеет место аппроксимация порядка *p*.

Для исследования схемы на аппроксимацию разложим проекции точного решения на сетку в ряд Тейлора в окрестности одного из сеточных узлов, например u_m^n:

$$u_m^{n+1}=u_m^n+\tau\left(u_t'\right)_m^n+\frac{\tau^2}{2!}\left(u_{tt}''\right)_m^n+O\left(\tau^3\right),$$

$$u_{m\pm1}^n=u_m^n\pm h\left(u_x'\right)_m^n+\frac{h^2}{2!}\left(u_{xx}''\right)_m^n\pm\frac{h^3}{3!}\left(u_{xxx}'''\right)_m^n+\frac{h^4}{4!}\left(u^{IV}{}_{xxxx}\right)_m^n+O\left(h^5\right).$$

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}-\frac{u_{m-1}^n-2u_m^{n+1}+u_{m+1}^n}{h^2}=\left(u_t'\right)_m^n+\frac{\tau}{2!}\left(u_{tt}''\right)_m^n+O\left(\tau^2\right)-$$

$$\frac{2\left(u_m^n+\frac{h^2}{2!}\left(u_{xx}''\right)_m^n+\frac{h^4}{4!}\left(u^{IV}{}_{xxxx}\right)_m^n+O\left(h^5\right)\right)-2\left(u_m^n+\tau\left(u_t'\right)_m^n+\frac{\tau^2}{2!}\left(u_{tt}''\right)_m^n+O\left(\tau^3\right)\right)}{h^2}=$$

$$(u')_m^n+\frac{\tau}{2!}(u'')_m^n+\frac{\tau^2}{3!}(u''')_m^n+O(\tau^4)-(u'')_m^n+\frac{h^2}{12}(u^{IV})_m^n+O(h^3)+\frac{\tau}{h^2}(u_t')_m^n+O\left(\frac{\tau^2}{h^2}\right)=$$

$O(\tau)+O(h^2)+O\left(\frac{\tau}{h^2}\right)$ - схема является условно аппроксимирующей.

Устойчивость.

А) *Спектральный метод.*

Определение 3. Говорят, что разностная задача является *устойчивой*, если из соотношений

$\mathbf{L}_\tau u_\tau - F_\tau = \xi_\tau$, $\mathbf{L}_\tau v_\tau - F_\tau = \eta_\tau$,

следует в смысле выбранной нормы

$\left\|\mathbf{u}_\tau - \mathbf{v}_\tau\right\| \le c_2\left(\left\|\boldsymbol{\xi}_\tau\right\| + \left\|\boldsymbol{\eta}_\tau\right\|\right)$, причем эта оценка равномерная, $c_2 \ne c_2(\tau)$.

Для исследования устойчивости воспользуемся спектральным признаком. Подставляем в разностное уравнение решение в виде гармоники Фурье, умноженной на коэффициент перехода $u_m^n = \lambda^n e^{im\alpha}$. Получаем уравнение для спектра оператора послойного перехода

$$\frac{\lambda-1}{\tau}=\frac{e^{-i\alpha}-2\lambda+e^{i\alpha}}{h^2}.$$

После очевидных преобразований, вводя обозначение $\sigma=\frac{\tau}{h^2}$ - аналог числа Куранта для параболических уравнений (иногда его называют параболическим числом Куранта),

получаем: $\lambda=\frac{1+2\frac{\tau}{h^2}\cos\alpha}{\left(1+2\frac{\tau}{h^2}\right)}$. Имеет место *строгая сходимость* $|\lambda(\alpha)|\le 1$ - схема сходится (абсолютно).

Ответ: схема сходится условно, порядок $O\left(\tau, h^2, \frac{\tau}{h^2}\right)$.

Б) *Метод энергетических неравенств.*

Определение 4. *Двухслойной схемой* называют схемы вида

$B_0\mathbf{y}^{n+1}+B_1\mathbf{y}^n=\tau\boldsymbol{\varphi}^n$, $n=0, 1, \ldots,$ $\mathbf{y}^0$ задан.

Любую двухслойную схему можно записать в виде

$$B\frac{\mathbf{y}^{n+1}-\mathbf{y}^n}{\tau}+A\mathbf{y}^n=\boldsymbol{\varphi}^n. \qquad (*)$$

Определение 5. Разностное уравнение (*) называют *канонической формой двухслойной схемы.* Если $B=E$, то схема (*) называется *явной* двухслойной схемой, если $B\ne E$, то схема (*) называется *неявной* двухслойной схемой.

Определение 6. При $A=A^*>0$ энергетическая норма, порожденная оператором A, есть $\|\mathbf{y}\|_A=\sqrt{(A\mathbf{y},\mathbf{y})}$.

Теорема (*энергетические неравенства*). Пусть в схеме (*) $A=A^*>0$ и не зависит от n. Условие $B\ge\frac{\tau}{2}A$ ***необходимо и достаточно*** для устойчивости по начальным данным в энергетической норме, порожденной оператором A.

Перепишем $\dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=\dfrac{u_{m-1}^n-2u_m^{n+1}+u_{m+1}^n}{h^2}$ в виде

$\dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\dfrac{2u_m^{n+1}-2u_m^n}{h^2}=\dfrac{u_{m-1}^n+u_{m+1}^n}{h^2}-\dfrac{2u_m^n}{h^2}$ или $\left(1+\dfrac{2\tau}{h^2}\right)E\dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}-\Lambda_{xx}u_m^n=0$.

Тогда $B=\left(1+\dfrac{2\tau}{h^2}\right)E$, $A=-\Lambda_{xx}$.

Собственные числа оператора Λ_{xx} имеют вид $\lambda_k=-\dfrac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{\alpha_k}{2}$, где α_k зависит от граничных условий (см. http://pyrkovaoa-fizteh.ru/gallery/%D1%81%D0%BE%D0%B1%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0%20%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B0.pdf).

Таким образом $A\le\dfrac{4}{h^2}E$, а $\dfrac{\tau}{2}A\le\dfrac{2\tau}{h^2}E<\left(1+\dfrac{2\tau}{h^2}\right)B$. Схема абсолютно (безусловно) устойчива.

ЗАМЕЧАНИЕ: схема Алена - Чена относится к явным схемам, т.к. разностное уравнение можно разрешить относительно u_m^{n+1} - значения сеточной функции на верхнем временном слое находятся по ее значениям на нижнем временном слое.