**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. ***Квадратурной формулой Гаусса-Кристоффеля*** (или просто ***Гаусса***) называют формулу наивысшего алгебраического порядка точности вида

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad (1)$$

**ИДЕЯ**: подобрать коэффициенты $A_k$ и узлы $x_k$ так, чтобы квадратурная формула была точна на полиномах степени $(2n-1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в интеграле $\int_a^b F(x)dx$ функция $F(x)$ плохо приближается полиномами, а функция $f(x) = F(x)/\rho(x)$, где $\rho(x)$ так называемая ***весовая функция***, уже достаточно хорошо приближается многочленами, то (1) имеет преимущество перед исходным интегралом.

Для определения $n$ неизвестных коэффициентов $A_k$ и $n$ неизвестных узлов $x_k$ получаем нелинейную систему $2n$ уравнений:

$$\int_a^b \rho(x) x^m dx = \sum_{k=1}^{n} A_k (x_k)^m, \qquad m = \overline{0, 2n-1} \qquad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. На конечном промежутке при $\rho(x) = 1$ обычно, сначала строят квадратуры Гаусса

$$\int_{-1}^{1} f(t) dt \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k) \qquad (3)$$

Затем с помощью замены переменной $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$ переходят к квадратурам на отрезке $[a, \ b]$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^{n} A_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k\right) \qquad (4)$$

①Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами на отрезке $[-1,\ 1]$.

Т. е. надо найти: $\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2)$

Для определения коэффициентов $A_1$, $A_2$ и $n$ неизвестных узлов $t_1$, $t_2$ получаем нелинейную систему из 4 уравнений:

$$A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1} 1dt = 2$$

$$A_1 t_1 + A_2 t_2 = \int_{-1}^{1} tdt = 0$$

$$A_1 (t_1)^2 + A_2 (t_2)^2 = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$A_1 (t_1)^3 + A_2 (t_2)^3 = \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0$$

---

Из $A_1 t_1 + A_2 t_2 = 0$ получаем $A_1 t_1 = -A_2 t_2$. Подставляя в остальные уравнения системы

$$A_1 + A_2 = 2$$

$$A_1 t_1 (t_1 - t_2) = \frac{2}{3}$$

$$A_1 t_1 ((t_1)^2 - (t_2)^2) = 0$$

---

Из второго уравнения последней системы $A_1 t_1 \neq 0$.
А тогда $(t_1)^2 = (t_2)^2$.
Но $t_1 \neq t_2$ (эти узлы различны), поэтому $t_1 = -t_2$, и, следовательно, из $A_1 t_1 = -A_2 t_2$ получаем, что $A_1 = A_2 = 1$.
Тогда из $A_1 t_1 (t_1 - t_2) = t_1\big(t_1 - (-t_1)\big) = 2(t_1)^2 = \frac{2}{3}$ имеем $t_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Соответственно $t_2 = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$.
И окончательно получаем

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

②Найдите значение $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, используя квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами.

Т.е. надо найти: $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$.
Здесь $\rho(x) = 1$.
Воспользуемся заменой переменной $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$ при $a = 0$, $b = 1$: $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t$.
Тогда, опираясь на результат предыдущего примера,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^1 e^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)^2} dx\right] = \frac{1}{2}\left[e^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} + e^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{-(0.7886)^2} + e^{-(0.2113)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-0.6220} + e^{-0.0446}\right] = \frac{1}{2}[0.5368 + 0.9563] = \frac{1.4931}{2} = 0.7465$$

③ Построить квадратуру Гаусса-Кристоффеля с двумя узлами для вычисления интеграла $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Здесь $\sqrt{1-x^2}$ - весовая функция.

$$\text{Т. о., надо найти: } \int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

Для определения коэффициентов $A_1, A_2$ и $n$ неизвестных узлов $x_1, x_2$ получаем нелинейную систему из 4 уравнений:

$$A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi$$

1) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

2) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left|\begin{matrix}\text{замена}\\ x = cosx\end{matrix}\right| = \int_{\pi}^{0}\frac{-\text{si}}{\sin x}dx = \int_{0}^{\pi}1dx = \pi$

3) ТФКП

$$A_1x_1 + A_2x_2 = \int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$$

$$A_1(x_1)^2 + A_2(x_2)^2 = \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}$$

1) $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left|\begin{matrix}\text{замена}\\ x = cosx\end{matrix}\right| = \int_{\pi}^{0}\frac{-\sin x\cos^2 x}{\sin x}dx = \int_{0}^{\pi}\cos^2 x\,dx = \int_{0}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

2) $\text{c} = \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx + \pi = |\text{по частям}| =$

$= \pi - x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{1} - I.$

$2I = \pi.$

$$I = \frac{\pi}{2}$$

3) ТФКП

$$A_1(x_1)^3 + A_2(x_2)^3 = \int_{-1}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$$

---

Из $A_1x_1 + A_2x_2 = 0$ получаем $A_1x_1 = -A_2x_2$. Подставляя в остальные уравнения системы

$A_1 + A_2 = \pi$

$A_1x_1(x_1 - x_2) = \frac{\pi}{2}$

$A_1x_1((x_1)^2 - (x_2)^2) = 0$

---

Из второго уравнения последней системы $A_1x_1 \neq 0$.

Тогда $(x_1)^2 = (x_2)^2$.

Но $x_1 \neq x_2$ (эти узлы различны), поэтому $x_1 = -x_2$, и, следовательно, из $A_1x_1 = -A_2x_2$ получаем, что $A_1 = A_2 = \frac{\pi}{2}$.

Тогда из $A_1x_1(x_1 - x_2) = \frac{\pi}{2}x_1\big(x_1 - (-x_1)\big) = \frac{\pi}{2}2(x_1)^2 = \frac{\pi}{2}$ имеем $x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Соответственно $t_2 = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$.

И окончательно получаем

$$\boxed{\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \frac{\pi}{2}f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{2}f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Это квадратурная формула Эрмита. Известна она также как формула Мелера.

При вычислении несобственного интеграла $\int_0^{\infty} f(x)dx$ можно воспользоваться квадратурой Гаусса

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-x}[e^x f(x)]dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k e^{x_k} f(x_k),$$

которую иногда называют ***квадратурой Лагерра***.

При вычислении несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ можно воспользоваться квадратурой Гаусса

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left[e^{x^2} f(x)\right]dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k e^{(x_k)^2} f(x_k),$$

которую иногда называют ***квадратурой Эрмита***.

④ Постройте квадратуру Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла $I = \int_0^{\infty} f(x)e^{-x}dx$ .

Здесь $e^{-x}$ - весовая функция.

$\text{Т.о., надо найти:} \int_0^{\infty} f(x)e^{-x}dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$

Для определения коэффициентов $A_1, A_2$ и $n$ неизвестных узлов $x_1, x_2$ получаем нелинейную систему из 4 уравнений:

$A_1 + A_2 = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$

$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^{\infty} = -(0-1) = 1$

$A_1x_1 + A_2x_2 = \int_0^{\infty} x\, e^{-x}dx = 1$

$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = -xe^{-x}|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}dx = -(0-0)+1 = 1$

$A_1(x_1)^2 + A_2(x_2)^2 = \int_0^{\infty} x^2\, e^{-x}dx = 2$

$\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x}|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} x\, e^{-x}dx = -(0-0)+2*1 = 2$

$A_1(x_1)^3 + A_2(x_2)^3 = \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = 6$

$\int_0^{\infty} x^3e^{-x}dx = -x^3e^{-x}|_0^{\infty} + 3\int_0^{\infty} x^2\, e^{-x}dx = -(0-0)+3*2 = 6$

Вычитая из каждого последующего уравнения системы предыдущее, получаем

$A_1 = 1 - A_2$
$A_1(x_1 - 1) + A_2(x_2 - 1) = 0$
$A_1x_1(x_1 - 1) + A_2x_2(x_2 - 1) = 1$
$A_1{x_1}^2(x_1 - 1) + A_2{x_2}^2(x_2 - 1) = 4$

Из $A_1(x_1 - 1) + A_2(x_2 - 1) = 0$ получаем $A_1(x_1 - 1) = -A_2(x_2 - 1)$. Подставляя в остальные уравнения системы

$A_1 = 1 - A_2$
$A_1(x_1 - 1)(x_1 - x_2) = 1$
$A_1(x_1 - 1)((x_1)^2 - (x_2)^2) = 4$

Разделив третье уравнение на второе, получаем

$x_1 + x_2 = 4$

Итак:
$A_1 = 1 - A_2$
$x_1 = 4 - x_2$

И из второго и третьего уравнения исходной системы получаем уже систему из двух уравнений для двух неизвестных
$(1 - A_2)(4 - x_2) + A_2 x_2 = 1$
$(1 - A_2)(4 - x_2)^2 + A_2 (x_2)^2 = 2$
Или
$4 - x_2 - 4A_2 + 2A_2 x_2 = 1$
$16 - 8x_2 + {x_2}^2 - A_2 16 + A_2 8x_2 - A_2 {x_2}^2 + A_2 {x_2}^2 = 2$
Т.е.
$3 - x_2 = 2A_2(2 - x_2)$
${x_2}^2 - 8x_2 + 14 = 8A_2(2 - x_2)$
Откуда
${x_2}^2 - 8x_2 + 14 = 12 - 4x_2$
И для нахождения $x_2$ получили квадратное уравнение
${x_2}^2 - 4x_2 + 2 = 0.$
Находим
$x_2 = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2}$ и $x_1 = 4 - x_2 = 2 \mp \sqrt{2}.$
Пусть $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, а $x_2 = 2 + \sqrt{2}$.

Из $3 - x_2 = 2A_2(2 - x_2)$ имеем $A_2 = \frac{3 - x_2}{2(2 - x_2)} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}$, и $A_1 = 1 - A_2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$ .
И окончательно получаем

$$\boxed{\int_0^\infty f(x) e^{-x} dx \approx \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} f\left(2 - \sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} f\left(2 + \sqrt{2}\right)}$$