Вариант 44 (2013-2014 уч.г.)

1.(5) Найти все действительные решения уравнения

$$y^{\mathrm{IV}}+2y'''+5y''=3\left(5x+2e^{-x}\right)^2.$$

2.(4) Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=-x-2y+2z,\\ \dot{y}=7x+9y-6z,\\ \dot{z}=6x+8y-5z.\end{cases}\qquad (\lambda_1=3,\ \lambda_{2,3}=\pm i)$$

3.(4) Найти положения равновесия системы, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия

$$\begin{cases}\dot{x}=\operatorname{sh}\left(3y-3y^2\right),\\ \dot{y}=3xy-2x+4y-4.\end{cases}$$

4.(5) Найти все решения уравнения

$$x^2(x+1)y''-x(3x+4)y'+2(2x+3)y=\frac{2x^4\ln(x+1)}{x+1},\quad x>0.$$

5.(5) Найти экстремали функционала и исследовать его на экстремум, определив знак приращения

$$J(y)=\int\limits_{11\pi/6}^{2\pi}\left(y'\right)^2\cos x\,dx,\quad y\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\ln 3,\quad y(2\pi)=0.$$

6.(5) Решить задачу Коши

$$2\left(y^2+y\right)y''+\left(y'\right)^2+\left(y^2-8\right)\left(y'\right)^4=0,\ y(10)=1,\ y'(10)=\frac{1}{3}.$$

7.(5) Решить уравнение, найти особые решения и нарисовать интегральные кривые

$$y'\left(y-x-\ln y'\right)=1.$$

8.(5) Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$2y^2\frac{\partial u}{\partial x}+ye^{-x}\frac{\partial u}{\partial y}-z\left(e^{-x}+4y^2\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0,\qquad u=yz\ \text{ при } y^2e^x=1,\ y>0.$$

Повышенный уровень

9.(7) Доказать, что при всех $A,B,C\in\mathbb{R}$ решение краевой задачи существует и единственно

$$(x+2)y'''-y'\operatorname{ch}x=0,\ -1\le x\le 0,\quad y(-1)=A,\ y'(-1)=B,\ y(0)+2y'(0)=C.$$

10.(5) Найти два независимых первых интеграла системы

$$\dot{x}=u,\ \ \dot{r}=v,\ \ \dot{u}=-2rx,\ \ \dot{v}=-x^2+\frac{3w^2r^2}{r^3+1},\ \ \dot{w}=-\frac{3vwr^2}{r^3+1}.$$

ОТВЕТЫ ВАРИАНТ 44

1.(5) $y = C_1 + C_2x + \left(C_3\sin 2x + C_4\cos 2x\right)e^{-x} + \frac{5}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \left(15x+30\right)e^{-x} + \frac{3}{5}e^{-2x}$

2.(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2\cos t \\ -3\cos t - \sin t \\ -2\cos t - 2\sin t \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 2\sin t \\ \cos t - 3\sin t \\ 2\cos t - 2\sin t \end{pmatrix}$.

3.(4) Положения равновесия: $M_1(0;1)$, $M_2(-2;0)$.

1) В M_1: $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, неустойчивый узел, касание к h_1.

2) В M_2: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{5}$, устойчивый фокус, по часовой стрелке.

4.(5) $y = C_1x^2 + C_2x^2\ln(x+1) + \frac{1}{3}x^2\ln^3(x+1)$.

5.(5) $\left(y'\cos x\right)' = 0,\ y = C\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + C_1,\ \hat{y} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right),$

$\Delta J = \int\limits_{11\pi/6}^{2\pi} \left(h'\right)^2 \cos x\,dx \ge 0$, min.

6.(5) $y' = p(y)$, $2\left(y^2+y\right)p' + p + \left(y^2-8\right)p^3 = 0$, $p = \sqrt{\frac{y+1}{y^2+8+C_1y}}$, $C_1 = 9$,

$y = \left(\frac{3x}{2} + 12\right)^{2/3} - 8$.

7.(5) $y = C - \ln(C-x)$, $y_o = x+1$.

8.(5) $u = F\left(e^{-x} + y^2,\ e^{2x}yz\right),\quad \hat{u} = e^{2x}yz\,\frac{(e^{-x}+y^2)^2}{4}$.

10.(5) $C_1 = \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) + rx^2;\ C_2 = w(r^3+1).$