Лекция 3 15.09.22

Пример 1 ЗК $\begin{cases} 2y' = \frac{y}{x} \\ y(-1) = 1 \end{cases}$

○ Здесь ОДУ вида $y' = f(x,y) = h(x) \cdot g(y)$, $h(x) = \frac{1}{2x}$, $g(y) = y$

(!) Заметим, что $f(x,y)$ не определена при $x=0$

• $g(y)=0$ при $y=0$ – решение ОДУ ($0'=0$), но не ЗК: $y(-1)=0 \neq 1$

•• $g(y) \neq 0$ $\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}$ – ОДУ с разделенными переменными

Интегрируем: $\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x| + C_1$

"реверанс" константам: $C_1 \in R$

$\exists\, C_1 = \ln C_2,\ C_2 > 0$: $\ln|y| = \ln\sqrt{|x|} + \ln C_2$

потенцируем $|y| = C_2\sqrt{|x|}$, $C_2 > 0$

раскрываем модуль $y = \pm C_2\sqrt{|x|}$

$\exists\, C_3 = \pm C_2$ $y = C_3\sqrt{|x|}$, $C_3 \in R \setminus \{0\}$

вспоминаем, что $y=0$ – решение

$\Rightarrow$ $y = C\sqrt{|x|}$, где $C \in R$

общее решение

Решение ЗК: $1 = C\sqrt{|-1|} \to C=1$

и $y = \sqrt{-x} = \varphi(x)$, $x<0$ ($-1<0$!!!)

$\lim\limits_{x \to 0-0} \varphi(x) = 0$, т.е. $\exists$, но $f(x,y) = \frac{y}{2x}$ не определена при $x=0$

$I = (-\infty, 0)$, $y = \varphi(x) = \sqrt{-x}$ непродолжимо вправо

(2) (8) [5]

Теорема 2.2 (о продолжении решения в замкнутой ограниченной области)

$\exists$ $f(x, y) \in C(G)$, $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$

т.е. выполнены все условия Т. $\exists$ и!

$\exists$ G_0 - замкнутое ограниченное множество, такое, что $\overline{G_0} \subset G$,

∂G_0 - граница G_0

Тогда $\forall$ решение ОДУ

$$y' = f(x, y) \qquad (2.2)$$

проходящее внутри G_0, можно продолжить в обе стороны до выхода его графика на границу множества G_0.

т.е. продолжить на такой отрезок $[a, b]$,

что т. $(a, y(a)) \in \partial G_0$ и

т. $(b, y(b)) \in \partial G_0$ -

точки лежат на границе множества $G_0 = \overline{G_0}$.

3 9 16

17.09.20

Лекция №3

[1] (4* / Д3) Доказать, что решение $y=\varphi(x)$, $x\in(a,b)$ задачи Коши $y'=x-y^2$, $y(1)=0$ можно продолжить на интервал $(a,+\infty)$.

• $x_0=1$, $x_0\in(a,b)$

•• уравнение Риккати

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

— в общем случае решение не может быть выражено в квадратурах.

○ Тем не менее $f(x,y)=x-y^2$ — непр.

$f'_y(x,y)=-2y$ — непр.

т. е. удовлетворяет всем условиям Th∃!

$\Longrightarrow$ через $\forall$ т. $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ проходит единственная интегральная кривая.

ДУ не интегрируется в конечном виде, поэтому при его изучении большую роль играют

• теоремы о продолжимости

•• качественный анализ поведения интегральных кривых (в том числе метод изоклин)

$f(x,y)=x-y^2=0$

Изоклина $x=y^2$ делит плоскость xOy на две части:

Л в левой из которых все решения убывают, т.к. $y'=x-y^2<0$,

П в правой возрастают: $y'=x-y^2>0$.

При этом интегральная кривая, проходящая через т. $(1,0)$ не может выйти из правой части П плоскости, поскольку для этого ей пришлось бы пересечь кривую $x=y^2$, на которой $y'=0$.

$A=(1,0)$ $\quad B(b^2,0)$ $\quad G_0=\{1\le x\le b^2,\ 0\le y\le 2b\}$

Важно

$D=(1,2b)$ $\quad C(b^2,2b)$

Согласно Th о продолжении решения ~~вплоть до границы~~ ограниченной области, выход на границу возможен лишь на BC.

В силу произвольности b^2 — решение продолжимо на $[1,+\infty)$

Теорема (о продолжении решения на весь заданный интервал)

Пусть $G = \{\alpha < x < \beta,\ y \in \mathbb{R}\}$ (допускаются случаи $\alpha = -\infty$ и/или $\beta = +\infty$)

Пусть $f(x,y) \in C(G)$, $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$ и
$\exists\ a(x) \in C(\alpha,\beta)$, $b(x) \in C(\alpha,\beta)$:
$a(x) \geq 0\ \forall x \in (\alpha,\beta)$ и $b(x) \geq 0\ \forall x \in (\alpha,\beta)$
и $|f(x,y)| \leq a(x)|y(x)| + b(x)\quad \forall x \in (\alpha,\beta)$

Тогда каждое решение ОДУ

$$y' = f(x,y), \qquad (2,2)$$

проходящее в G, можно продолжить на весь интервал (α,β).

Док-во в конце семестра.

$\boxed{2}$ Доказать, что ЗК $\begin{cases} y' = y + 2 - \sin y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

имеет решение, определенное на всем $\mathbb{R}$

○ $f(x,y) = y + 2 - \sin y$ – удовл. усл. Th $\exists$ и!
Пусть $a = 1 \geq 0$ $\quad b = 3 \geq |2 - \sin y| > 0$
и $|f(x,y)| \leq |y| + |2 - \sin y| \leq 1 \cdot |y| + 3$
+ Th о продолжении решения на весь заданный интервал. ●

Важно

(5 (11) ~~не успеваем~~ (–) 3.1
4

3.2 Геометрические свойства семейств интегральных кривых.

3.2.1 $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ (3.2.1)

Замена $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y + C$, где $C = const$ (1a) переводит (2.2.1) в себя, т.к. $d\tilde{x} = dx$, $d\tilde{y} = dy$

Т.о., если $\Phi(x,y)=0$ есть интеграл (частный) ОДУ (2.2.1), то и $\Phi(\tilde{x},\tilde{y})=0$ – тоже интеграл, т.е. $\Phi(x, y+C)=0$ – интеграл (общий) ОДУ (3.2.1) $\forall C$

Замена (1a) геометрически заключается в том, что все точки плоскости xy переносятся на одну и ту же величину C параллельно оси ординат – ПЕРЕНОС.

ОДУ (2.2.1) допускает такой (параллельный) перенос, т.е. поле направлений после такого переноса совпадает с первоначальным.

Линии $x = x_0$ – изоклины: $f(x_0) = const$

Семейство интегральных кривых при преобразовании (1a) – ПЕРЕНОСЕ – переходит в себя.

Опр. Совокупность (множество) преобразований образует группу, если
- она содержит тождественное преобразование;
- если для каждого преобразования она содержит обратное,
- если для любых двух преобразований из этой совокупности их произведение содержится в этой совокупности.

3.2.2 Аналогично $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$ (3.2.2) допускает групу преобразований

$\tilde{x} = x + C$, $\tilde{y} = y$ (2a)

(группа переносов параллельно оси x)

Важно

Общий интеграл (2.2.2) получается из частного заменой x на $x+C$: $\Phi(x+C, y) = 0$

§3. ОДУ $1^{го}$ п., приводимые к уравнениям с разделяющимися переменными.

$\boxed{3.1}$ Уравнения вида
$$y' = f(ax + by + c)$$
приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой
$$z(x) = ax + by + c.$$
Тогда
$$z' = a + by'$$
и, соответственно:
$$z' = a + bf(z) = g(z)$$

$\boxed{3}$ Ф62 $\quad y' = \cos(y - x)$

○ замена $\quad z = y - x$
$$z' = y' - 1$$
$$z' = \cos z - 1$$

• $\cos z \neq 1 \qquad \dfrac{dz}{\cos z - 1} = dx$
$$\int \frac{dz}{-2\sin^2\frac{z}{2}} = \int dx$$
$$\operatorname{ctg}\frac{z}{2} = x + C \qquad \operatorname{ctg}\frac{y-x}{2} = x + C$$

•• $\cos z = 1 \quad z = 2\pi k \quad dz = 0$

решение $\qquad y - x = 2\pi k$

Ответ: $y = x + 2\operatorname{arcctg}(x + C)$
$$y = x + 2\pi k$$

Важно

3.2 ОДУ с однородной правой частью

Опр. Функция одного или нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется однородной степени k, если существует такое (постоянное) число k, что при любых [вещественных] λ

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

Указанное число k называется степенью (показателем) однородности функции.

Пример: $f(x,y) = x^2 + y^2$ – однородная ф-я степени $k=2$.

Опр. ОДУ 1го порядка в нормальной форме (Коши)

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (2)$$

называется однородным относительно x и y, если $f(x,y)$ является однородной функцией переменных x и y с показателем однородности $k=0$.

т.е. $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x,y) = f(x,y)$

$\exists\ \lambda = \frac{1}{x}$: $f(x,y) = f(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y) = f(1, \frac{y}{x}) = \tilde{f}(\frac{y}{x})$

и ОДУ

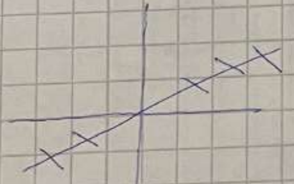
$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) - \qquad (3.1)$$

– однородное.

ОДУ (3.1) допускает группу преобразований

$$\tilde{x} = Cx, \quad \tilde{y} = Cy \qquad (3.2)$$

(3.2) – преобразование подобия (гомотетия) с центром подобия в начале координат



$y = ax$ – изоклины

Если $\Phi(x,y) = 0$ – интеграл (частный) ОДУ (3.1),

то $\Phi(Cx, Cy) = 0$ – общий интеграл ОДУ (3.1)

Утверждение. Замена $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ (3.3) приводит однородное ОДУ (3.1) к ОДУ с разделяющимися переменными.

$\bigcirc$ $y(x) = z(x)\cdot x$ $\quad y' = z'\cdot x + z$ $\quad xz' + z = f(z)$ $\quad xz' = f(z) - z = \varphi(x)$ ⊛

- $\varphi(z) \neq 0$ $\quad \frac{dz}{\varphi(z)} = \frac{dx}{x}$ $\quad \Phi(z) = \ln|x| + C$, где $\Phi' = 1/\varphi$
- $\varphi(z) = 0$, т.е. $f(z) = z$ и $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ $\quad$ • $y=0$ – решение • $y \neq 0$ $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$

⊛ Ось Oy не решение в такой постановке

$\boxed{3.5}$ Обобщенно однородные ОДУ 9 (18)

$\boxed{3.3}$ ОДУ, приводимые к однородным или с разделяющимися переменными. 8 (10) 2

Утверждение 3.3.1

ОДУ вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad (3.3.1)$$

приводится к ОДУ с разделяющимися переменными.

○ ① $c_1 = c_2 = 0$ ОДУ (2.4.1) – однородное

② $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ $\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow$ система $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ имеет ! решение $x = \alpha,\ y = \beta$

замена $\tilde{x} = x - \alpha$, $\tilde{y} = y - \beta$

$d\tilde{x} = dx$, $d\tilde{y} = dy$

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = f\left(\frac{a_1(\tilde{x}+\alpha) + b_1(\tilde{y}+\beta) + c_1}{a_2(\tilde{x}+\alpha) + b_2(\tilde{y}+\beta) + c_2}\right) =$$

$$= f\left(\frac{a_1\tilde{x} + b_1\tilde{y} + c_1 + a_1\alpha + b_1\beta}{a_2\tilde{x} + b_2\tilde{y} + c_2 + a_2\alpha + b_2\beta}\right) = f\left(\frac{a_1\tilde{x} + b_1\tilde{y}}{a_2\tilde{x} + b_2\tilde{y}}\right) \text{ – однородное}$$

③ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = \lambda a_2 \\ b_1 = \lambda b_2 \end{matrix}$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda a_2x + \lambda b_2y + c_2}{a_2x + b_2y + c_1}\right) =$$

$$= f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y + c_1) + c_2 - \lambda c_1}{a_2x + b_2y + c_1}\right) =$$

$$= g\,(a_2x + b_2y + c_1)$$ см. §3.1

Важно

замена $z(x) = a_2x + b_2y + c_1$ приводит его к ОДУ с разделяющимися переменными.

9 (18) 3

3.5 ОБОБЩЕННО ОДНОРОДНЫЕ ОДУ

Опр | ОДУ $1^{го}$ порядка называется ОБОБЩЕННО ОДНОРОДНЫМ, если оно не меняется при замене x на tx, y на $t^p y$, где p - рациональное.

т.е. допускает группу преобразований
$$\tilde{x} = Cx$$
$$\tilde{y} = C^p y$$

Заметим, что при этом y' заменится на $t^{p-1}y'$, т.к.

$$y' = \frac{dy}{dx} \to \frac{d(t^p y)}{d\,tx} = t^{p-1}\frac{dy}{dx} = t^{p-1}y'$$

Чтобы
- узнать, будет ли ОДУ обобщенно однородным
- найти p

нужно приравнять друг другу показатели степеней, в которых число t будет входить в каждое слагаемое ОДУ после указанной замены (Бернулли 1726).

$\boxed{4}$ Ф127 $\quad 2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$

не с разделяющимися, не однородное

$$2xy' \to 2tx\,t^{p-1}y' \to t^p$$
$$y \to t^p y \qquad \to t^p$$
$$y^2\sqrt{x - x^2y^2} \to t^{2p}y^2\sqrt{\underbrace{tx - t^2x^2t^{2p}y^2}_{t \text{ и } t^{2(p+1)}}}$$

t и $t^{2(p+1)} \to p+1 = \frac{1}{2}$, $p = -\frac{1}{2}$

тогда и $2p + \frac{1}{2} = p$

и ОДУ обобщенно однородное.

Важно

Утверждение 5.1

Замена $y(x) = (z(x))^p$ $(z = y^{1/p})$ сводит обобщенно однородное ОДУ к однородному

○ ОДУ не меняется при замене x на tx, y на $t^p y$, т.е. при замене x на tx, z на tz ⇒ оно однородное ●

Замечание 5.1 При $y(x) < 0$ используем замену $y(x) = -(z(x))^p$, где $z(x) > 0$.

Если $p < 0$, надо проверить является ли $y = 0$ решением.

Замечание 5.2 После замены $y = \pm z^p$ ОДУ становится однородным.

Дальней замена $w(x) = \frac{z}{x}$ сводит его к ОДУ с разделяющимися переменными.

Тогда $y = \pm z^p = \pm(w \cdot x)^p = \pm w^p \cdot x^p = $
$= \omega(x) \cdot x^p$, где

$\omega(x)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

В силу этого на практике, как только найдено p, удобно сразу делать замену $y(x) = w(x) \cdot x^p$

Важно

11-(10)

$-$

$\boxed{4}$ $2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$

нашли, что при замене $x = tx$, $y = t^{-1/2}y$

ОДУ инвариантно.

Замена $y = \omega(x)\cdot x^p = \frac{\omega(x)}{\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{\omega'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{\omega}{x^{3/2}}$$

$$2\sqrt{x}\,\omega' - \cancel{\frac{\omega}{\sqrt{x}}} + \cancel{\frac{\omega}{\sqrt{x}}} = \frac{\omega^2}{x}\sqrt{x - x^2\frac{\omega^2}{x}}$$

или $2\sqrt{x}\,\omega' = \frac{\omega^2}{x}\sqrt{x}\sqrt{1-\omega^2}$ $(x > x^2y^2 \geq 0)$

$2\omega' = \frac{\omega^2}{x}\sqrt{1-\omega^2}$ – уже ОДУ с раздел. перем.

$\omega \neq 0$
$\omega^2 \neq 1$

$$2\frac{d\omega}{\omega^2\sqrt{1-\omega^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$2\frac{d\omega}{\omega^2\sqrt{\omega^2}\sqrt{\frac{1}{\omega^2}-1}} = \pm 2\frac{d\omega}{\omega^3\sqrt{\frac{1}{\omega^2}-1}} = \mp\frac{d\frac{1}{\omega^2}}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2}-1}} =$$

$$= \pm 2\, d\sqrt{\frac{1}{\omega^2}-1}$$

$$\pm 2\sqrt{\frac{1}{\omega^2}-1} = \ln|x| + C$$

$$4\left(\frac{1}{\omega^2}-1\right) = (\ln x C_1)^2$$

$$\boxed{4\left(\frac{1}{xy^2}-1\right) = (\ln x C)^2}$$

$\omega = 0 \to y = 0$ – решение $\boxed{y=0}$

$\omega^2 = 1$ $xy^2 = 1$ $\omega = \text{const} = \pm 1$ – решение

$\boxed{xy^2 = 1}$

Важно