Интегральное квадратичное аппроксимирование функции на отрезке.

Пусть $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a,\ b]$ функция: $f \in C[a,\ b]$;
$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x)$ - система линейно независимых на отрезке $[a,\ b]$ функций;
$Q_m = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x)$ - обобщенный полином.
Надо аппроксимировать $f(x)$ обобщенным полиномом $Q_m(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ так, чтобы интеграл $I = \int\limits_a^b [f(x) - Q_m(x)]^2\,dx$ был минимальным, т.е стоит задача подобрать $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ (*управляемые переменные*) так, чтобы I принимал минимальное значение.

Запишем необходимое условие минимума:

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0 \quad \forall k \quad \left(k = \overline{1,m}\right),$$

из которого получим систему уравнений:

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k}\int\limits_a^b \left[f(x) - \sum_{j=2}^{m} a_j\varphi_j(x)\right]^2 dx = 2\int\limits_a^b \left[f(x) - \sum_{j=2}^{m} a_j\varphi_j(x)\right]\varphi_k(x)dx = 0,$$

т.е.

$$\sum_{j=2}^{m} a_j \int\limits_a^b \varphi_j(x)\varphi_k(x)dx = \int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx,\ k = \overline{1,m}.$$

Т.к. система функций линейно независима, то определитель полученной системы отличен от нуля, поэтому решение существует и единственно.

Замечание. Если система $\{\varphi_k(x)\}_1^m$ ортогональна на $[a,\ b]$, то вычисления существенно сократятся: $\int\limits_a^b \varphi_j(x)\varphi_k(x)dx = A_{jk}\delta_{jk}$ - и $a_k = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx}{\int\limits_a^b \varphi_k{}^2(x)dx}$ коэффициенты Фурье разложения функции $f(x)$ по ортогональной системе функций $\{\varphi_k(x)\}_1^m$.

Примеры ортогональныч систем:

① $1,\ \cos x,\ \sin x, \dots,\ \cos mx,\ \sin mx$ на $[0,\ 2\pi]$.

$$Q_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right).$$

② Полиномы Лежандра $P_n = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1 \right)^n$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$ на отрезке $[-1,\ 1]$:

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right),$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right),$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right), \dots$$

Замечание. Если надо приблизить функцию на отрезке $[a,\ b]$, то с помощью линейного преобразования $z = \dfrac{b-a}{2} x + \dfrac{b+a}{2}$ получаем полиномы

$$\widetilde{P}_k(z) = P_k(x) = P_k\left(\frac{2z - b - a}{b - a} \right)$$ ортогональные на $[a,\ b]$.

③ Полиномы Чебышева $T_n \cos(n \arccos x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$:

$$T_0(x) = 1,$$
$$T_1(x) = x,$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \dots$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Пример 2. Получить среднеквадратичное приближение функции $f(x)=\sin x$ на отрезке $[0,\ \pi]$ обобщенным полиномом третьей степени.

② Воспользуемся системой ортогональных полиномов Лежандра.

$z\in[0,\ \pi]$, $x\in[-1,\ 1]$, замена $z=\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}$ или $x=\frac{2}{\pi}z-1$.

$$\widetilde{P}_k(z)=P_k(x)=P_k\left(\frac{2}{\pi}z-1\right).$$

$$\widetilde{P}_0(z)=1,$$

$$\widetilde{P}_1(z)=\frac{2}{\pi}z-1,$$

$$\widetilde{P}_2(z)=\frac{1}{2}\left(3\left(\frac{2}{\pi}z-1\right)^2-1\right),$$

$$\widetilde{P}_3(z)=\frac{1}{2}\left(5\left(\frac{2}{\pi}z-1\right)^3-3\left(\frac{2}{\pi}z-1\right)\right).$$

$$P^3(z)=a_0\widetilde{P}_0(z)+a_1\widetilde{P}_1(z)+a_2\widetilde{P}_2(z)+a_3\widetilde{P}_3(z).$$

$$a_0=\frac{\int\limits_0^\pi 1\cdot\sin z dz}{\int\limits_0^\pi 1^2 dz}=\frac{-\cos z\big|_0^\pi}{\pi}=\frac{2}{\pi},$$

$$a_1=\frac{\int\limits_0^\pi\left(\frac{2}{\pi}z-1\right)\cdot\sin z dz}{\int\limits_0^\pi\left(\frac{2}{\pi}z-1\right)^2 dz}=\frac{\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi z\cdot\sin z dz+\cos z\big|_0^\pi}{\frac{\pi}{2}\frac{\left(\frac{2}{\pi}z-1\right)^3}{3}\Bigg|_0^\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\frac{2}{\pi}(-z\cos z)\big|_0^\pi+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos z dz-2}{\frac{1}{3}-\left(\frac{-1}{3}\right)}=0,$$

$$a_2=\frac{\int\limits_0^\pi\frac{1}{2}\left(3\left(\frac{2}{\pi}z-1\right)^2-1\right)\cdot\sin z dz}{\int\limits_0^\pi\left(\frac{1}{2}\left(3\left(\frac{2}{\pi}z-1\right)^2-1\right)\right)^2 dz}=\frac{\int\limits_0^\pi\left(\frac{6}{\pi^2}z^2-\frac{6}{\pi}z+1\right)\cdot\sin z dz}{\int\limits_0^\pi\left(\frac{6}{\pi^2}z^2-\frac{6}{\pi}z+1\right)^2 dz}=\frac{10}{\pi^3}\left(\pi^2-12\right),$$

$$a_3=0.$$

$$P^3(z)=\frac{2}{\pi}+0\cdot\widetilde{P}_1(z)+\frac{10}{\pi^3}\left(\pi^2-12\right)\widetilde{P}_2(z)+0\cdot\widetilde{P}_3(z)=$$

$$\frac{2}{\pi}+\frac{10}{\pi^3}\left(\pi^2-12\right)\frac{1}{2}\left(3\left(\frac{2}{\pi}z-1\right)^2-1\right)=\frac{2}{\pi}+\left(\frac{10}{\pi}-\frac{120}{\pi^3}\right)\left(\frac{6}{\pi^2}z^2-\frac{6}{\pi}z+1\right)=$$

$$\frac{60\left(\pi^2-12\right)}{\pi^5}z^2-\frac{60\left(\pi^2-12\right)}{\pi^4}z+\frac{12\left(\pi^2-10\right)}{\pi^3}.$$ ❷

Пример 3. Получить среднеквадратичное линейное приближение функции $f(x)=\sin x$ на отрезке $[0,\ \pi]$.

③ $P^1(z)=a_0\cdot 1+a_1\cdot x$

Надо найти значения a_0 и a_1, при которых $I=\int\limits_0^{\pi}\left[\sin z-P^1(z)\right]^2 dz$ минимален.

Получаем систему:

$$\begin{cases} a_0\int\limits_0^{\pi}1\cdot 1dz+a_1\int\limits_0^{\pi}1\cdot zdz & =\int\limits_0^{\pi}1\cdot\sin zdz \\ a_0\int\limits_0^{\pi}z\cdot 1dz+a_1\int\limits_0^{\pi}z\cdot zdz & =\int\limits_0^{\pi}z\cdot\sin zdz \end{cases},\ \text{или}\ \begin{cases} a_0\pi+a_1\dfrac{\pi^2}{2} & =2 \\ a_0\dfrac{\pi^2}{2}+a_1\dfrac{\pi^3}{3} & =\pi \end{cases},\ \text{или}$$

$$\begin{cases} a_0\pi+a_1\dfrac{\pi^2}{2} & =2 \\ a_0\pi+a_1\dfrac{2\pi}{3} & =2 \end{cases},\ \text{т.е.}\ a_0=\frac{2}{\pi},\ a_1=0.$$

Ответ: $P^1(z)=\dfrac{2}{\pi}$. ❸