Методом Монте-Карло вычислить интеграл $I = \iint\limits_G (x-y)dxdy$, где область G определяется неравенствами $2x-1 \le y \le 2-x^2$, используя таблицу случайных чисел

x	-0.6918	-0.13528	-0.0516	-0.19476	-2.32156	-0.86704	-1.27336	-1.949	-2.76296	-0.34844	-1.58068	-2.62428	-1.78784	-0.79256	-0.43988	-2.17944	-2.99248	-0.77164	0.47908	-1.74788
y	-5.95798	1.37405	1.37099	-3.14404	-2.23846	-6.14851	1.96418	-0.70342	-4.18201	-4.56964	-1.11949	1.40438	-6.48178	-6.96976	0.93998	1.87265	-2.31073	1.26443	-6.36379	-5.74648

*Сравнить с точным значением. Указать, сколько точек надо взять, чтобы ошибка была 10^{-2}?

Решение.

Метод Монте-Карло заключается в том, что в *N*-мерный прямоугольник $a_i \le x_i \le b_i$ $\left(i = 1, 2, \ldots, N\right)$, содержащий область *G*, по которой производится интегрирование набрасывают случайные точки $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$. При этом каждая координата x_i генерируется как случайное число, равномерно распределенное на отрезке $\left[a_i, b_i\right]$. Если точка попадает в область, учитывают значение интегрируемой в ней функции, в противном случае точку отбрасывают.

Пусть из общего числа *M* случайных точек *m* точек попали в область *G*, а остальные $M - m$ оказались вне области *G*. Тогда при достаточно большом *M* имеет место приближенная формула:

$$I = \int\limits_G f\left(\vec{x}\right) d\vec{x} \simeq \frac{V_G}{m} \sum_{j=1}^{m} f\left(\vec{x}_j\right), \qquad (1)$$

где V_G - *N*-мерный объем области *G*.

Если вычисление объема V_G по каким-либо причинам затруднительно, то приближенно можно принять $V_G \simeq V_{пр} \dfrac{m}{M}$, где $V_{пр}$ - объем *N*-мерного прямоугольника, содержащего область интегрирования *G*. И для приближенного вычисления интеграла получаем

$$I = \int\limits_G f\left(\vec{x}\right) d\vec{x} \simeq \frac{V_{пр}}{M} \sum_{j=1}^{m} f\left(\vec{x}_j\right). \qquad (2)$$

① Определим границы прямоугольника, содержащего область *G*:

Из $2x - 1 = 2 - x^2$ получаем $x^2 + 2x - 3 = \left(x+3\right)\left(x-1\right) = 0$.

Т.о. $x \in \left[-3;1\right]$, а $y \ge 2\left(-3\right) - 1 = -7$. Т.к. максимальное значение функции $f(x) = 2 - x^2$ на $\left[-3;1\right]$ достигается при $x = 0$, то $y \le 2$, т.е. $y \in \left[-7;2\right]$.

Площадь прямоугольника $V_{np} = 4 \cdot 9 = 36$.

② Запишем координаты случайных точек в таблицу и выберем те из них, которые попадают в область интегрирования:

x	y	$y_m = 2x - 1$	$y \geq y_m$	$y_M = 2 - x^2$	$y \leq y_M$	$f(x, y) = x - y$
-0.6918	-5.95798	-2.3836				
-0.13528	1.37405	-1.27056	✔	1.981699	✔	-1.50933
-0.0516	1.37099	-1.1032	✔	1.997337	✔	-1.42259
-0.19476	-3.14404	-1.38952				
-2.32156	-2.23846	-5.64312	✔	-3.38964		
-0.86704	-6.14851	-2.73408				
-1.27336	1.96418	-3.54672	✔	0.378554		
-1.949	-0.70342	-4.898	✔	-1.7986		
-2.76296	-4.18201	-6.52592	✔	-5.63395		
-0.34844	-4.56964	-1.69688				
-1.58068	-1.11949	-4.16136	✔	-0.49855	✔	-0.46119
-2.62428	1.40438	-6.24856	✔	-4.88685		
-1.78784	-6.48178	-4.57568				
-0.79256	-6.96976	-2.58512				
-0.43988	0.93998	-1.87976	✔	1.806506	✔	-1.37986
-2.17944	1.87265	-5.35888	✔	-2.74996		
-2.99248	-2.31073	-6.98496	✔	-6.95494		
-0.77164	1.26443	-2.54328	✔	1.404572	✔	-2.03607
0.47908	-6.36379	-0.04184				
-1.74788	-5.74648	-4.49576				

③ По формуле (2) получаем:

$$I = \iint\limits_G (x - y)dxdy \approx \frac{36}{20}\left(-1.50933 - 1.42259 - 0.46119 - 1.37986 - 2.03607\right) = -12.2563.$$

④ Найдем точное значение интеграла:

$$I = \iint_G (x-y)dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)\,dy = \int_{-3}^{1} \left(xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=2x-1}^{y=2-x^2} dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(x\left(2-x^2\right) - \frac{\left(2-x^2\right)^2}{2} - x\left(2x-1\right) + \frac{\left(2x-1\right)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(2x - x^3 - 2 + 2x^2 - \frac{x^4}{2} - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx = \int_{-3}^{1} \left(-\frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} \right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{\left(-3\right)^5}{10} + \frac{\left(-3\right)^4}{4} - \frac{2\left(-3\right)^3}{3} - \frac{\left(-3\right)^2}{2} + \frac{3\left(-3\right)}{2} \right) =$$

$$= \left(\frac{-3^5-1}{10} + \frac{3^4-1}{4} + \frac{2\left(3^3+1\right)}{3} + \frac{1-3^2}{2} - \frac{3\left(1+3\right)}{2} \right) = \left(\frac{-244}{10} + 20 + \frac{56}{3} - 4 - 6 \right) =$$

$$= \left(-24 - \frac{2}{5} + 10 + 18 + \frac{2}{3} \right) = \left(4 + \frac{2\left(5-3\right)}{15} \right) = \frac{64}{15} = 4.266667.$$

⑤ Сравнивая точное и найденное методом Монте-Карло значение интеграла, находим, что $\Delta I = \left|4.266667 - \left(-12.2563\right)\right| = 16.52294.$☹

Учитывая, что нам надо увеличить точность примерно в 1650 раз, то т.к. погрешность метода пропорциональна $\frac{1}{\sqrt{M}}$, число точек следует увеличить приблизительно в $3 \cdot 10^6$ раз.

➔ **Метод Монте-Карло следует применять только в тех случаях, когда ничего другого не остается, т.к. он не способен обеспечить очень высокую точность.**

Ответ: - 12.2563 (точный 64/15 = 4.266667)

Замечание: Если таблица случайных значений не приведена, то ее можно построить, сгенерировав таблицу случайных чисел ξ равномерно распределенных на промежутке, например $[0;1]$, или воспользоваться готовой:

0.57705	0.35483	0.11578	0.65339	0.66674
0.71618	0.09393	0.93045	0.93382	0.99279
0.7371	0.30304	0.93011	0.05758	0.24202
0.70131	0.55186	0.42844	0.00336	0.9401
0.16961	0.64003	0.52906	0.88222	0.60981
0.53324	0.20514	0.09461	0.98585	0.13094
0.43166	0.00188	0.99602	0.52103	0.35193
0.26275	0.55709	0.69962	0.91827	0.6456
0.05926	0.86977	0.31311	0.07069	0.64559
0.66289	0.31303	0.27004	0.13928	0.68008

Затем, из нее получить таблицу случайных чисел η равномерно распределенных на промежутке, например $[a;b]$, используя замену $\eta = a + \xi(b - a)$.