МЕТОД ФУРЬЕ в КОЛЬЦЕ 1.

Решите краевую задачу

$$\Delta u = 16 r \sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$u_r\big|_{r=1} = 3\cos 3\varphi,$$

$$u\big|_{r=3} = 9\left(4\sin\varphi + 3\cos 3\varphi\right) \qquad \left(0 \le \varphi \le 2\pi\right).$$

Уроев стр. 178 – 189 (пример 1 стр. 181 –183, пример 2 стр. 184-186)

Фарлоу. У с ЧП для научных работников и инженеров. Стр. 248 – 264

Тихонов, Самарский со стр. 328

①

Замена, приводящая к однородному ДуЧП:

уравнение в полярной системе координат $(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi)$[1]:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 16r\sin\varphi.$$

Т.к. $\sin\varphi$ - собственная функция оператора $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$, то частное решение будем искать, например, в виде:

$$u_ч = f(r)\sin\varphi$$

[1] Желательно найти такое частное решение, чтобы ГУ не стали сложнее.

$$\Delta u_{ч} = \sin\varphi\left(f_{rr} + \frac{1}{r} f_r - \frac{1}{r^2} f \right) = 16r\sin\varphi$$

$r^2 f_{rr} + rf_r - f = 16r^3$ - уравнение Эйлера.

Желательно (но не обязательно)

$$f_r\big|_{r=1} = 0,$$

$$f\big|_{r=3} = 9 \cdot 4 = 36$$

Однородное уравнение

$$r^2 f_{rr} + r f_r - f = 0,$$

решение ищем в виде $f(r) = r^{\alpha}$[2],

характеристическое уравнение $\alpha(\alpha - 1) + \alpha - 1 = 0$

$$\alpha^2 = 1$$

$$\alpha_{1,2} = \pm 1,\ f(r) = C_1 r + C_2 \frac{1}{r}.$$

[2] замена $r = e^z$ сводит уравнение Эйлера к ОДУ с постоянными коэффициентами

Частное решение можно искать в виде

$f = Ar^3$:

$$r^2 \cdot A \cdot 3 \cdot 2r + r \cdot A \cdot 3r^2 - Ar^3 = 16r^3$$

→

$$8A = 16$$

→

$$A = 2$$

$$f(r) = C_1 r + C_2 \frac{1}{r} + 2r^3$$

$$f_r\Big|_{r=1} = 0$$

$$\rightarrow \left(C_1 - C_2 \frac{1}{r^2} + 2 \cdot 3r^2 \right)\Bigg|_{r=1} = 0$$

$$\rightarrow C_1 - C_2 = -6$$

$$f\Big|_{r=3} = 9 \cdot 4 = 36$$

$$\rightarrow f\Big|_{r=3} = 9 \cdot 4 = 36$$

$$\rightarrow 3C_1 + \frac{C_2}{3} + 2 \cdot 3^3 = 36$$

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = -6, \\ 9C_1 + C_2 = -54 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} C_1 = -6, \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(r) = 2r^3 - 6r$$

$$\boxed{u_ч = \left(2r^3 - 6r\right)\sin\varphi}$$

②

$u(r,\varphi)=u_ч+V(r,\varphi),$
где $V(r,\varphi)$- решение краевой задачи

$\Delta V=0,\ \ r=\sqrt{x^2+y^2};$

$V_r\big|_{r=1}=3\cos 3\varphi$[3],

$V\big|_{r=3}=9\cdot 3\cos 3\varphi$[4] $\qquad (0\le\varphi\le 2\pi)$

---

[3] $u_r\big|_{r=1}=(u_ч+V)_r\big|_{r=1}$

[4] $u\big|_{r=3}=(u_ч+V)\big|_{r=3}$

③

Решение ищем **МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ** в виде:

$$V(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

Тогда

$$\Delta V = V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r^2}V_{\varphi\varphi} = R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0\,.$$

Деля на $\frac{1}{r^2}R\Phi$, получаем:

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$ - постоянная разделения[5].

[5] Чтобы функция (3) была решением ДУ (2), последнее равенство должно удовлетворяться тождественно, т.е. для всех значений независимых переменных $r<1$ и $0 \le \varphi < 2\pi$. Левая часть равенства является функцией только переменного *r*, а правая – только φ. Фиксируя, например, некоторое значение *r* и меняя φ (или наоборот), получим, что правая и левая части последнего равенства при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение.

Отсюда получаем два уравнения:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \qquad (1)$$

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0. \qquad (2)$$

Из гладкости исходной функции u (а следовательно и V), следует, что $\Phi(\varphi) \in C^2[0;2\pi]$,

причем[6]

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi),\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi).$$

[6] При изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $V(r,\varphi)$ должна вернуться к исходному значению: $V(r,\varphi) = V(r,\varphi + 2\pi)$ (условие периодичности). Отсюда следует, что $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, т.е. $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией угла φ с периодом 2π.

$\lambda < 0$, $\Phi(\varphi) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$ - периодичности нет.

$\lambda = 0$, $\quad \Phi(\varphi) = C_1\varphi + C_2$ - периодичность при $C_1 = 0$, период произволен.

$\lambda > 0$, $\Phi(\varphi) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\varphi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\varphi$- решение периодично, но нам требуется период 2π.

Учтем условия на концах:

$$\begin{cases} \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = C_1 \cos\sqrt{\lambda}2\pi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}2\pi \\ \sqrt{\lambda}C_2 = -\sqrt{\lambda}C_1 \sin\sqrt{\lambda}2\pi + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\sqrt{\lambda}2\pi \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1\left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) - C_2 \sin\sqrt{\lambda}2\pi = 0 \\ C_1 \sin\sqrt{\lambda}2\pi + C_2\left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) = 0 \end{cases} -$$

получили линейную однородную систему относительно C_1 и C_2.

Эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$0=\begin{vmatrix}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) & -\sin\sqrt{\lambda}2\pi \\ \sin\sqrt{\lambda}2\pi & \left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right)\end{vmatrix}=\left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right)^2+\sin^2\sqrt{\lambda}2\pi=$$

$$=1-2\cos\sqrt{\lambda}2\pi+\cos^2\sqrt{\lambda}2\pi+\sin^2\sqrt{\lambda}2\pi=2-2\cos\sqrt{\lambda}2\pi=2\left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right),$$

то есть $\cos\sqrt{\lambda}2\pi=1\Rightarrow\sqrt{\lambda}2\pi=2\pi k\Rightarrow\sqrt{\lambda}=k$.

Следовательно $\boxed{\lambda=k^2}$, $k\in\mathbb{N}$ - собственные значения оператора $-\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bullet$.

Выберем две линейно независимые собственные функции следующим образом:

$$\Phi_{k,1} = \cos k\varphi,$$

$$\Phi_{k,2} = \sin k\varphi.$$

Учитывая случай $\lambda = 0$,

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad (3)$$

Уравнение (2)

$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$ - уравнение Эйлера.

Его решение ищем в виде $R(r) = r^{\alpha}$.

Характеристическое уравнение: $\alpha(\alpha - 1) + \alpha - k^2 = 0$.

$$\alpha^2 = k^2$$

$k = 0$, $\alpha_{1,2} = 0$ - кратный корень (кратность 2)

$$R_0(r) = C_1 + C_2 \ln r$$

$k \neq 0$, $\alpha_{1,2} = \pm k$, $R_k(r) = C_1 r^k + C_2 \dfrac{1}{r^k}$.

④

Решение КЗ для уравнения Лапласа будем искать в виде функционального ряда с разделенными переменными r и φ:

$$V(r,\varphi)= C_1 + C_2 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r^k} (D_k \cos k\varphi + F_k \sin k\varphi)$$

Замечание. Для внутренней задачи (КЗ в круге) надо положить $C_2 = D_k = F_k = 0$, т.к. в противном случае $V(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ обращается в бесконечность при $r = 0$ и не является гармонической функцией в круге;

для внешней задачи (КЗ вне круга) - $C_1 = C_2 = A_k = B_k = 0$, поскольку решение внешней задачи должно быть ограничено на бесконечности.

⑤

Согласно МРП, решение КЗ $V(r,\varphi)$ ищем в виде:

$$\begin{pmatrix} \forall k & B_k = F_k = 0; \\ k \neq 3 & A_k = D_k = 0; \\ & A_3 \neq 0,\ D_3 \neq 0; \\ & C_1 = C_2 = 0 \end{pmatrix}$$

$$V(r,\varphi) = A_3 r^3 \cos 3\varphi + \frac{D_3}{r^3} \cos 3\varphi$$

Из ГУ:

$$\left. \left(A_3 r^3 \cos 3\varphi + \frac{D_3}{r^3} \cos 3\varphi \right)_r \right|_{r=1} = 3\cos 3\varphi \rightarrow$$

$$3A_3 - 3D_3 = 3.$$

$$\left. \left(A_3 r^3 \cos 3\varphi + \frac{D_3}{r^3} \cos 3\varphi \right) \right|_{r=3} = 9 \cdot 3\cos 3\varphi \rightarrow$$

$$27A_3 + \frac{D_3}{27} = 27.$$

$$\begin{cases} A_3 - D_3 = 1, \\ A_3 + \dfrac{D_3}{27^2} = 1. \end{cases}$$

Откуда получаем $\begin{cases} A_3 = 1, \\ D_3 = 0. \end{cases}$

Таким образом:

$$\boxed{V(r,\varphi) = r^3 \cos 3\varphi}$$

⑥

ОТВЕТ:

$$u(r,\varphi)=\left(2r^3-6r\right)\sin\varphi+r^3\cos 3\varphi .$$