МЕТОД ФУРЬЕ в КОЛЬЦЕ 2.

Выясните при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет решение задача Неймана

$$\Delta u = y, \; r = \sqrt{x^2 + y^2} < 2;$$

$$u_r\big|_{r=2} = \sin^3\varphi + \alpha\cos^2\varphi, \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi),$$

и решите задачу при этих α.

📖 👓✎ Уроев стр. 178 – 189 (пример 3 стр. 185-186)

Фарлоу. У с ЧП для научных работников и инженеров. Стр. 248 – 264

Тихонов, Самарский со стр. 313

Михайлов со стр. 93щ

Кошляков стр. 309

①

Замена, приводящая к однородному ДуЧП:

частное решение будем искать, например, в виде:

$$u_ч = ay^3$$

$$\Delta u_ч = a \cdot 3 \cdot 2 \cdot y = y$$

$$a = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{u_ч = \frac{1}{6} y^3 = \frac{r^3}{6} \sin^3 \varphi}$$

②

$u(r,\varphi) = u_ч + V(r,\varphi),$

где $V(r,\varphi)$- решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta V = 0, \ \ r = \sqrt{x^2 + y^2} < 2; \\ V_r\big|_{r=2} = \sin^3\varphi + \alpha\cos^2\varphi - (u_ч)_r\big|_{r=2} = \alpha\cos^2\varphi - \sin^3\varphi, \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi), \end{cases}$$

③

ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Теорема. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ - ограниченная область, граница которой ∂G есть кусочно-гладкая поверхность, ориентированная внешними нормалями.

В $\overline{G} = G \cup \partial G$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$.

Тогда поток векторного поля $\vec{a}$ через границу области ∂G равен объемному интегралу от $\operatorname{div} \vec{a}$ по области G:

$$\iint\limits_{\partial G} (\vec{a}, \vec{n}) ds = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \vec{a} \, d\vec{x}.$$

$$\vec{a} = u\nabla v$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}(u\nabla v) = \nabla(u\nabla v) = \nabla\left(\overset{\downarrow}{u}\,\nabla v\right) + \nabla\left(u\,\overset{\downarrow}{\nabla} v\right) = \nabla u\,\nabla v + u\,\Delta v$$

$$(\vec{a},\vec{n}) = u(\nabla v,\vec{n}) = u\,\frac{\partial v}{\partial n}$$

$$\iiint\limits_{G} u\,\Delta v\,d\vec{x} = -\iiint\limits_{G} \nabla u\,\nabla v\,d\vec{x} + \iint\limits_{\partial G} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,ds \tag{1}$$

$$\iiint\limits_{G} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\vec{x} = \iint\limits_{\partial G} \left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds \tag{2}$$

$$\iiint\limits_{G} u\,\Delta u\,d\vec{x} = -\iiint\limits_{G} |\nabla u|^2\,d\vec{x} + \iint\limits_{\partial G} u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds \tag{3}$$

$$\iiint_G (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\vec{x} = \iint_{\partial G}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds \qquad (2)$$

$u \equiv 1,$

$v = V$

$$\iiint_G \Delta V d\vec{x} = \iint_{\partial G}\frac{\partial V}{\partial n}\,ds$$

$\Delta V = 0$

$$\underline{\iint_{\partial G}\frac{\partial V}{\partial n}\,ds = 0} \text{ -} \qquad (4)$$

необходимое условие разрешимости задачи Неймана.

Для нашей задачи

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{\partial G} = \left.V_r\right|_{r=2} = \alpha \cos^2 \varphi - \sin^3 \varphi,$$

и необходимое условие разрешимости задачи Неймана приобретает вид:

$$\underline{\oint\limits_{r=2} V_r dl = 2\int\limits_0^{2\pi} \left(\alpha \cos^2 \varphi - \sin^3 \varphi\right) d\varphi = 0}$$

$$0 = \int\limits_0^{2\pi} \left(\alpha \cos^2 \varphi - \sin^3 \varphi\right) d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \alpha \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d \cos\varphi =$$

$$= \alpha \left.\left(\frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \varphi\right) d\cos\varphi = \alpha\pi + \left.\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{3}\right)\right|_0^{2\pi} = \alpha\pi$$

$$\boxed{\alpha = 0}$$

$$\begin{cases} \Delta V = 0, \; r = \sqrt{x^2 + y^2} < 2; \\ V_r\big|_{r=2} = -\sin^3\varphi = -\dfrac{3}{4}\sin\varphi + \dfrac{1}{4}\sin 3\varphi, \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi), \end{cases}$$

④

Решение КЗ для уравнения Лапласа ищется в виде функционального ряда с разделенными переменными r и φ:

$$V(r,\varphi) = C_1 + C_2 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r^k}\left(D_k \cos k\varphi + F_k \sin k\varphi\right)$$

Замечание. Для внутренней задачи (КЗ в круге) надо положить $C_2 = D_k = F_k = 0$, т.к. в противном случае $V(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ обращается в бесконечность при $r = 0$ и не является гармонической функцией в круге

$$V(r,\varphi) = C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right)$$

$$\begin{pmatrix} \forall k & A_k = 0; \\ k \neq 1,3 & B_k = 0; \\ & B_1 \neq 0,\ B_3 \neq 0; \\ & C_1 \neq 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{V(r,\varphi) = \underline{C_1} + B_1 r \sin\varphi + B_3 r^3 \sin 3\varphi}$$

⑤

$$V_r = B_1 \sin\varphi + 3B_3 r^2 \sin 3\varphi$$

Из ГУ:

$$V_r\big|_{r=2} = \left(\underline{C_1} + B_1 r \sin\varphi + B_3 r^3 \sin 3\varphi\right)_r\Big|_{r=2} = -\frac{3}{4}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 3\varphi$$

т. е.

$$\left(B_1 \sin\varphi + 3B_3 \cdot 2^2 \sin 3\varphi\right)\Big|_{r=2} = -\frac{3}{4}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 3\varphi \rightarrow$$

$$\begin{cases} B_1 = -\dfrac{3}{4}, \\ B_3 = \dfrac{1}{48}, \end{cases} \quad C_1 - \forall$$

Таким образом:

$$\boxed{V(r,\varphi) = C_1 - \frac{3}{4} r \sin\varphi + \frac{1}{48} r^3 \sin 3\varphi}$$

⑥

ОТВЕТ:

$$u(r,\varphi) = u_ч + V(r,\varphi) = \frac{r^3}{6}\left(\frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi\right) + C_1 - \frac{3}{4} r\sin\varphi + \frac{1}{48} r^3 \sin 3\varphi =$$

$$= \frac{r^3}{8}\sin\varphi + C_1 - \frac{3}{4} r\sin\varphi - \frac{1}{48} r^3 \sin 3\varphi.$$