МЕТОД ФУРЬЕ в КОЛЬЦЕ 4.

Решите краевую задачу для уравнения Пуассона в кольце $1 < r < 2$:

$$\Delta u = 4\frac{(x-y)^2}{(x^2+y^2)^3}, \qquad ;$$

$$u_r\Big|_{r=1} = \frac{2xy}{x^2+y^2},$$

$$(u_r+u)\Big|_{r=2} = \frac{(x+y)^2}{8(x^2+y^2)}, \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi).$$

Ответ запишите в декартовых координатах.

📖 ✍ Уроев стр. 178 – 189 (пример 3 стр. 185-186)
Фарлоу. У с ЧП для научных работников и инженеров. Стр. 248 – 264
Тихонов, Самарский со стр. 313
Михайлов со стр. 93щ
Кошляков стр. 309

①

Запишем все правые части в полярной системе координат: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.

Заметим, что при этом:

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2,$$

$$(x \pm y)^2 = r^2\cos^2\varphi \pm 2r^2\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2(1 \pm \sin 2\varphi)$$

$$2xy = 2r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi = r^2\sin 2\varphi$$

$$\Delta u = 4\frac{r^2(1-\sin 2\varphi)}{(r^2)^3} = 4\frac{1-\sin 2\varphi}{r^4} = \frac{4}{r^4} - \frac{4\sin 2\varphi}{r^4},$$

$$u_r\big|_{r=1} = \frac{r^2 \sin 2\varphi}{r^2} = \sin 2\varphi,$$

$$(u_r + u)\big|_{r=2} = \frac{r^2(1+\sin 2\varphi)}{8r^2} = \frac{1}{8} + \frac{\sin 2\varphi}{8}, \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi).$$

В силу линейности задачи

$u = V + W,$

где

$$\Delta V = \frac{4}{r^4}, \qquad \Delta W = -\frac{4\sin 2\varphi}{r^4},$$

$$V_r\big|_{r=1} = 0, \qquad W_r\big|_{r=1} = \sin 2\varphi,$$

$$\left(V_r + V\right)\big|_{r=2} = \frac{1}{8}. \qquad \left(W_r + W\right)\big|_{r=2} = \frac{\sin 2\varphi}{8}.$$

V

$$\begin{cases} \Delta V = \dfrac{4}{r^4}, & ; \\ V_r\big|_{r=1} = 0, \\ \left(V_r + V\right)\big|_{r=2} = \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Т.к. правые части не зависят от φ, то решение будем искать в виде:

$$V = f(r)$$

$$\Delta V = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r = \frac{4}{r^4}.$$

$r^2 f_{rr} + r f_r = \dfrac{4}{r^2}$ - уравнение Эйлера.

$f_r\big|_{r=1} = 0$,

$\left(f_r + f\right)\big|_{r=2} = \dfrac{1}{8}$.

Однородное уравнение

$r^2 f_{rr} + r f_r = 0$,

решение ищем в виде $f(r) = r^{\alpha}$[1],

характеристическое уравнение $\alpha(\alpha - 1) + \alpha = 0$

$$\alpha^2 = 0 \rightarrow \alpha_{1,2} = 0 \text{ - кратный корень.}$$

$f_o(r) = C_1 + C_2 \ln r$.

[1] замена $r = e^z$ сводит уравнение Эйлера к ОДУ с постоянными коэффициентами

Частное решение можно искать в виде

$$f_p = \frac{A}{r^2}:$$

$$r^2 \cdot \frac{A \cdot (-2) \cdot (-3)}{r^4} + r \cdot \frac{A \cdot (-2)}{r^3} = \frac{4}{r^2}$$

$\rightarrow$

$$(6-2)A = 4$$

$\rightarrow$

$$A = 1$$

$$\underline{f(r) = C_1 + C_2 \ln r + \frac{1}{r^2}}$$

$$f_r\big|_{r=1}=0$$

$$\rightarrow \left(C_1+C_2\ln r+\frac{1}{r^2}\right)_r\Bigg|_{r=1}=0$$

$$\rightarrow C_2-2=0$$

$$\left(f_r+f\right)\big|_{r=2}=\frac{1}{8}$$

$$\rightarrow \left(\frac{2}{r}-\frac{2}{r^3}+C_1+2\ln r+\frac{1}{r^2}\right)\Bigg|_{r=2}=\frac{1}{8}$$

$$\rightarrow C_1=-\frac{7}{8}-2\ln 2=0$$

$$V=f(r)=-\frac{7}{8}-2\ln 2+2\ln r+\frac{1}{r^2}$$

$$\boxed{V=2\ln r+\frac{1}{r^2}-\frac{7}{8}-\ln 4}$$

$$
\left|
\begin{aligned}
&\Delta W = -\frac{4\sin 2\varphi}{r^4}, \qquad\qquad ; \\
&W_r\big|_{r=1} = \sin 2\varphi, \\
&\left(W_r + W\right)\big|_{r=2} = \frac{\sin 2\varphi}{8}.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\Delta W = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}.
$$

Т.к. $\sin 2\varphi$ - собственная функция оператора $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$, то будем искать решение в виде:

$$
W = g(r)\sin 2\varphi
$$

$$\Delta W = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{4}{r^2} g \right) \sin 2\varphi$$

$r^2 g_{rr} + r g_r - 4g = -\dfrac{4}{r^2}$ - уравнение Эйлера.

$$g_r\big|_{r=1} = 1,$$

$$\left(g_r + g\right)\big|_{r=2} = \frac{1}{8}.$$

Однородное уравнение

$$r^2 g_{rr} + r g_r - 4g = 0,$$

решение ищем в виде $g(r) = r^{\alpha}$[2],

характеристическое уравнение $\alpha(\alpha - 1) + \alpha - 4 = 0$

$$\alpha^2 = 4 \rightarrow$$

$$\alpha_{1,2} = \pm 2.$$

$$g_o(r) = C_1 r^2 + \frac{C_2}{r^2}.$$

[2] замена $r = e^z$ сводит уравнение Эйлера к ОДУ с постоянными коэффициентами

Частное решение можно искать в виде

$g_p = \frac{A}{r^2}\ln r$ (резонанс):

$$r^2 \cdot \left(\frac{A\cdot(-2)\cdot(-3)}{r^4}\ln r - 2\frac{A}{r^4} - 3\frac{A}{r^4} \right) + r\cdot\left(\frac{A\cdot(-2)}{r^3}\ln r + \frac{A}{r^3} \right) - 4\frac{A}{r^2}\ln r = -\frac{4}{r^2}$$

→

$$(-5+1)A = -4$$

→

$$A = 1$$

$$\underline{g(r) = C_1 r^2 + \frac{C_2}{r^2} + \frac{\ln r}{r^2}}$$

$$g_r\big|_{r=1}=1$$

$$\rightarrow \left(C_1 r^2+\frac{C_2}{r^2}+\frac{\ln r}{r^2}\right)_r\Bigg|_{r=1}=1$$

$$\rightarrow \left(2C_1 r-2\frac{C_2}{r^3}-2\frac{\ln r}{r^3}+\frac{1}{r^3}\right)_r\Bigg|_{r=1}=1$$

$$\rightarrow 2C_1-2C_2+1=1$$

$$\rightarrow C_1=C_2$$

$$\left(g_r+g\right)\big|_{r=2}=\frac{1}{8}$$

$$\rightarrow \left(2C_1 r-2\frac{C_1}{r^3}-2\frac{\ln r}{r^3}+\frac{1}{r^3}+C_1 r^2+\frac{C_1}{r^2}+\frac{\ln r}{r^2}\right)\Bigg|_{r=2}=\frac{1}{8}$$

$$\rightarrow 8C_1-2\frac{\ln 2}{8}+\frac{1}{8}+\frac{\ln 2}{4}=\frac{1}{8}$$

$$\rightarrow C_1=0$$

$$W = g(r)\sin 2\varphi = \frac{\ln r}{r^2}\sin 2\varphi$$

$$\boxed{W = \frac{\ln r}{r^2}\sin 2\varphi}$$

$$u(r,\varphi) = V(r,\varphi) + W(r,\varphi) = 2\ln r + \frac{1}{r^2} - \frac{7}{8} - \ln 4 + \frac{\ln r}{r^2}\sin 2\varphi.$$

②

$$u(r,\varphi)=\ln r^2+\frac{1}{r^2}-\frac{7}{8}-\ln 4+\frac{2\ln r}{r^2}\frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}=$$

$$=\ln r^2+\frac{1}{r^2}-\frac{7}{8}-\ln 4+\frac{\ln r^2}{r^4}r^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$r^2=x^2+y^2,$$

$$r\cos\varphi=x,$$

$$r\sin\varphi=y$$

$$u(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{7}{8}-\ln 4+\frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}xy$$

③

ОТВЕТ:

$$u(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{7}{8}-\ln 4+\frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}xy$$

.