МЕТОД ФУРЬЕ на ОТРЕЗКЕ.

Решите начально-краевую задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - u + t^2 + 2, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \sin 3\pi x, \quad u_t\big|_{t=0} = x, \qquad 0 \le x \le 1; \tag{2}$$

$$u\big|_{x=0} = t^2, \quad u\big|_{x=1} = t + t^2, \quad t \ge 0. \tag{3}$$

Уроев стр. 79 – 92 (пример 1 стр. 87 – 88, пример 2 стр. 88 - 90)
Тихонов, Самарский со стр. 108
Кошляков со стр. 159

①

Замена, приводящая к однородным ГУ:

$$u = v + xt + t^2. \qquad (4)$$

$$u_{tt} = v_{tt} + 2, \qquad u_{xx} = v_{xx};$$

$$u\big|_{t=0} = v\big|_{t=0}, \qquad u_t\big|_{t=0} = v_t\big|_{t=0} + x$$

$$u\big|_{x=0} = v_x\big|_{x=0} + t^2, \quad u\big|_{x=1} = v\big|_{x=1} + t + t^2$$

$$2 + v_{tt} = v_{xx} - v - xt - t^2 + t^2 + 2$$

②

$v(x,t)$- решение смешанной задачи

$$v_{tt} = v_{xx} - v - xt, \; 0 < x < 1, \quad t > 0; \qquad (5)\ (\text{ДУ})$$

$$v\big|_{t=0} = \sin 3\pi x, \quad v_t\big|_{t=0} = x - x = 0, \qquad 0 \le x \le 1; \qquad (6)\ (\text{НУ})$$

$$v\big|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=1} = 0, \quad t \ge 0. \qquad (7)\ (\text{ГУ})$$

③

Сначала будем искать нетривиальные решения однородного уравнения

$$v_{tt}=v_{xx}-v$$

в виде ✐

$$v(x,t)=X(x)\cdot T(t):$$

$$X(x)\cdot T''(t)=X''(x)\cdot T(t)-X(x)\cdot T(t)$$

✐

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}-1,$$ а лучше (и разумнее)

$$\frac{T''(t)}{T(t)}+1=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 1 = f(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = g(x)$$

$f(t) = g(x)$ при $\forall t > 0$ и $\forall x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \; f(t) = g(x) = const = \lambda$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 1 = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$T''(t) = (\lambda - 1)T(t)$$

$$\underline{X''(x) = \lambda X(x)}$$

(7) → $\underline{X(0) = X(1) = 0}$

задача Штурма - Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

$\underline{\underline{\lambda = a^2 > 0}}$ $X = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$. Из ГУ $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{a} + C_2 e^{-a} = 0. \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$ и $X \equiv 0$.

$\underline{\underline{\lambda = 0}}$ $X = C_1 x + C_2$. Из ЛГУ $C_2 = 0$, из ПГУ $C_1 = 0$ и $X \equiv 0$.

$\underline{\underline{\lambda = -a^2 < 0}}$ $X = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$,

Из ЛГУ $C_1 = 0$.

и $X = C_2 \sin ax$ - нетривиальное $\rightarrow C_2 \neq 0$, а $\sin a = 0$ из ПГУ.

$a = \pi k \rightarrow \lambda = -(\pi k)^2$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{X_k = \sin \pi k x,\ k \in \mathbb{N}}$$

④

Решение СЗ (5) – (7) $v(x,t)$ будем искать в виде функционального ряда с разделенными переменными x и t:

$$v(x,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x). \tag{8}$$

$$X_k = \sin \pi k x,\ k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

$$\left| \begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k''(x) - \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) - xt, \\[2ex]
&\left[\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x)\right]\Bigg|_{t=0} = \sin 3\pi x = X_3(x), \\[2ex]
&\left[\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) X_k(x)\right]_{x=0} = 0.
\end{aligned} \right.$$

⑤

Далее, разложим функцию $(-x)$, входящую в правую часть ДУ (5) по системе $\{\sin \pi kx\}_{k=1}^{\infty}$ в ряд Фурье:

$$-x=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \pi kx,$$

$$\int_0^1 \sin \pi kx \cdot \sin \pi nx dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{1}{2}, & n = k. \end{cases}$$

$$\boxed{b_k=}\ \frac{\int_0^1 (-x)\sin \pi kx dx}{\int_0^1 \sin^2 \pi kx dx} = 2(-x)\left(-\frac{\cos \pi kx}{\pi k}\right)\Bigg|_0^1 - \frac{2}{\pi k}\int_0^1 \cos \pi kx dx = \frac{2\cos \pi k}{\pi k} - \frac{2}{\pi k}\frac{\sin \pi kx}{\pi k}\Bigg|_0^1 =$$

$$\boxed{=\frac{2(-1)^k}{\pi k}},\ k \in \mathbb{N}.$$

НУ уже разложены.

$$\left|\begin{array}{l}\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k''(t) X_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t)\left(-(\pi k)^2\right) X_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) + t\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k X_k, \\[2em] \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = \sin 3\pi x = X_3(x), \\[2em] \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k'(0) X_k(x) = 0. \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} T_k''(t) = -\left[(\pi k)^2 + 1\right] T_k(t) + t \cdot b_k, \\[2em] T_k(0) = \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N} \setminus \{3\}, \\ 1, & k = 3, \end{cases} \\[2em] T_k'(0) = 0. \end{array}\right.$$

ЗК для ОДУ

⑥

Решаем ЗК для ОДУ

$$\boxed{k=3}\quad \begin{cases} T_3''(t) = -\left[9\pi^2+1\right]T_3(t) - t\cdot\dfrac{2}{3\pi}, \\ T_3(0)=1, \\ T_3'(0)=0. \end{cases}$$

$$T_3(t) = C_1\cos\left(\sqrt{9\pi^2+1}\cdot t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{9\pi^2+1}\cdot t\right) - \frac{2t}{3\pi\left[9\pi^2+1\right]}.$$

$$T_3(0)=1 \rightarrow C_1=1,$$

$$T_3'(0)=0 \rightarrow C_2\sqrt{9\pi^2+1} - \frac{2}{3\pi\left[9\pi^2+1\right]} = 0,\ C_2 = \frac{2}{3\pi\left[9\pi^2+1\right]^{3/2}}.$$

$$T_3(t) = \cos\left(\sqrt{9\pi^2+1}\cdot t\right) + \frac{2}{3\pi\left[9\pi^2+1\right]^{3/2}}\sin\left(\sqrt{9\pi^2+1}\cdot t\right) - \frac{2t}{3\pi\left[9\pi^2+1\right]}$$

$$\boxed{k \neq 3} \quad \begin{cases} T_k''(t) = -\left[(\pi k)^2 + 1\right] T_k(t) + t \cdot \dfrac{2(-1)^k}{\pi k}, \\ T_k(0) = 0, \\ T_k'(0) = 0. \end{cases}$$

$$T_k(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\pi^2 k^2 + 1} \cdot t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\pi^2 k^2 + 1} \cdot t\right) + \frac{2(-1)^k t}{\pi k\left[\pi^2 k^2 + 1\right]}.$$

$$T_k(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0,$$

$$T_k'(0) = 0 \rightarrow C_2 \sqrt{\pi^2 k^2 + 1} + \frac{2(-1)^k}{\pi k\left[\pi^2 k^2 + 1\right]} = 0, \; C_2 = -\frac{2(-1)^k}{\pi k\left[\pi^2 k^2 + 1\right]^{3/2}}.$$

$$T_k(t) = \frac{2(-1)^k}{\pi k\left[\pi^2 k^2 + 1\right]}\left(t - \frac{\sin\left(\sqrt{\pi^2 k^2 + 1} \cdot t\right)}{\sqrt{\pi^2 k^2 + 1}}\right).$$

⑦

ОТВЕТ: $u(x,t) =$ $xt+t^2$ +

$$+\left(\cos\left(\sqrt{9\pi^2+1}\cdot t\right)+\frac{2}{3\pi\left[9\pi^2+1\right]^{3/2}}\sin\left(\sqrt{9\pi^2+1}\cdot t\right)-\frac{2t}{3\pi\left[9\pi^2+1\right]}\right)\sin 3\pi x\ +$$

$$+\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq 3}}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{\pi k\left[\pi^2k^2+1\right]}\left(t-\frac{\sin\left(\sqrt{\pi^2k^2+1}\cdot t\right)}{\sqrt{\pi^2k^2+1}}\right)\sin \pi kx.$$