МЕТОД ФУРЬЕ на ОТРЕЗКЕ.

Решите начально-краевую задачу

$$u_t = u_{xx} + xe^t + e^{t-x}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = x + \cos x - \sin x, \qquad 0 \le x \le \pi; \tag{2}$$

$$\left[u + u_x\right]\big|_{x=0} = e^t, \quad \left[u + u_x\right]\big|_{x=\pi} = (1+\pi)e^t, \quad t \ge 0. \tag{3}$$

🕮 👓✎ Уроев стр. 79 – 92 (пример 1 стр. 87 – 88, пример 2 стр. 88 - 90)
Тихонов, Самарский со стр. 108
Кошляков со стр. 159

①

Поиск замены, приводящей к однородным ГУ:

пусть $h(x,t) = \widetilde{u} + \widetilde{u}_x$.

Тогда $h\big|_{x=0} = e^t$, $\quad h\big|_{x=\pi} = e^t + \pi e^t$

Линейный интерполянт $h(x,t) = e^t + xe^t$.

Т.е. $\widetilde{u} + \widetilde{u}_x = xe^t + e^t$.

Искомая замена $\widetilde{u} = xe^t$

$u = v + xe^t$. (4)

$$u_t = v_t + xe^t, \qquad u_{xx} = v_{xx};$$

$$u\big|_{t=0} = v\big|_{t=0} + x\ ,$$

$$\left[u + u_x\right]\big|_{x=0} = \left[v + xe^t + v_x + e^t\right]_{x=0} = e^t,$$

$$\left[u + u_x\right]\big|_{x=\pi} = \left[v + xe^t + v_x + e^t\right]_{x=\pi} = (1+\pi)e^t$$

$$v_t + xe^t = v_{xx} + xe^t + e^{t-x}$$

②

$v(x,t)$- решение смешанной задачи:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + e^t e^{-x}, \ 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ v\big|_{t=0} = x + \cos x - \sin x - x, \qquad 0 \le x \le \pi; \\ \left[v + v_x\right]_{x=0} = e^t - e^t = 0, \quad \left[v + v_x\right]_{x=\pi} = (1+\pi)e^t - xe^t - e^t = 0, \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Заметим, что

$$v_{tx} = v_{xt} = v_{xxx} - e^t e^{-x},$$

$$v_x\big|_{t=0} = -\sin x - \cos x.$$

Проведем еще одну замену искомой функции

$w(x,t) = v + v_x$:

$$\left|\begin{array}{l}
w_t = w_{xx} + e^t e^{-x} - e^t e^{-x}, \; 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\
w\big|_{t=0} = \cos x - \sin x - \sin x - \cos x, \qquad 0 \le x \le \pi; \\
w\big|_{x=0} = 0, \quad w\big|_{x=\pi} = 0, \quad t \ge 0.
\end{array}\right.$$

Решаем задачу

$$\begin{cases} w_t = w_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0; & (5)\ (\text{ДУ}) \\ w\big|_{t=0} = -2\sin x, \quad 0 \le x \le \pi; & (6)\ (\text{НУ}) \\ w\big|_{x=0} = 0, \quad w\big|_{x=\pi} = 0, \quad t \ge 0. & (7)\ (\text{ГУ}) \end{cases}$$

методом Фурье.

③

Задача Штурма - Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

$\underline{\underline{\lambda = a^2 > 0}}$ $X = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$. Из ГУ $\begin{cases} C_1 + C_1 = 0, \\ C_1 e^{a\pi} + C_2 e^{-a\pi} = 0. \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$ и $X \equiv 0$.

$\underline{\underline{\lambda = 0}}$ $X = C_1 x + C_2$. Из ЛГУ $C_2 = 0$, из ПГУ $C_1 = 0$ и $X \equiv 0$.

$\underline{\underline{\lambda = -a^2 < 0}}$ $X = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$,

Из ЛГУ $C_1 = 0$.

и $X = C_2 \sin ax$ - нетривиальное $\rightarrow C_2 \neq 0$, а $\sin a\pi = 0$ из ПГУ.

$a\pi = \pi k \rightarrow \lambda = -k^2,\ k \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{X_k = \sin kx,\ k \in \mathbb{N}}$$

④

Решение СЗ (5) – (7) $w(x,t)$ будем искать в виде функционального ряда с разделенными переменными x и t:

$$w(x,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x). \tag{8}$$

$$X_k = \sin kx,\ k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k''(x),$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x)\right]\Bigg|_{t=0} = -2\sin x = -2X_1(x).$$

⑤

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\left(-k^2\right) X_k(x), \\ \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = -2X_1(x).\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}T_k'(t) = -k^2 T_k(t), \\ T_k(0) = \begin{cases}-2, & k=1, \\ 0, & k \geq 2.\end{cases}\end{array}\right.$$

⑥

Решаем ЗК для ОДУ

$$\boxed{k=1}\quad \begin{cases} T_1'(t) = -T_1(t), \\ T_1(0) = -2. \end{cases}$$

$$T_1(t) = Ce^{-t}.$$

$$T_1(0) = -2 \rightarrow C = -2,$$

$$T_1(t) = -2e^{-t}$$

$\boxed{k \geq 2}$ $\begin{cases} T_k'(t) = -k^2 T_k(t), \\ T_k(0) = 0. \end{cases}$

$$T_k(t) = Ce^{-k^2 t}.$$

$$T_k(0) = 0 \rightarrow C = 0,$$

$$T_k(t) = 0$$

⑦

$$\underline{w(x,\, t) = -2e^{-t}\sin x}$$

$$v + v_x = -2e^{-t}\sin x$$

$$v = Ce^{-x} + a\cos x + b\sin x, \qquad v_x = -Ce^{-x} - a\sin x + b\cos x$$

$$Ce^{-x} + a\cos x + b\sin x - Ce^{-x} - a\sin x + b\cos x = -2e^{-t}\sin x$$

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ b - a = -2e^{-t}. \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -e^{-t}, \\ a = e^{-t}. \end{cases}$$

$$\underline{v = Ce^{-x} + e^{-t}(\cos x - \sin x)}.$$

? $v = Ce^{-x} + e^{-t}(\cos x - \sin x)$: $C = ?$

ГУ выполнены $\forall C$.

НУ $v\big|_{t=0} = \cos x - \sin x$

$v(x,0) = Ce^{-x} + \cos x - \sin x \rightarrow C = 0$

$$\boxed{v = e^{-t}(\cos x - \sin x)}$$

ОТВЕТ:

$$u(x,t) = xe^{t} + e^{-t}(\cos x - \sin x).$$