МЕТОД ФУРЬЕ в ШАРЕ 1.

Решите краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u = 6z,\ \ r < 1;\ x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$$

$$u\big|_{r=1} = 2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^3\theta.$$

Уроев стр. 263 – 291 (пример 1 стр. 287 –288, пример 2 стр. 288-289, пример 3 стр. 289- 291)
Пальцев Б.В. Сферические функции. МФТИ. Учебно-методическое пособие. Стр. 3- 49
Тихонов, Самарский. УМФ Со стр. 709
Фарлоу. У с ЧП для научных работников и инженеров. Стр. 264 – 273
Михайлов со стр. 83
Кошляков стр. 380

①

Замена, приводящая к однородному ДуЧП:

частное решение удобно искать в ДСК, например, в виде:

$$u_ч = az^3$$

$$\Delta u_ч = a \cdot 3 \cdot 2 \cdot z = 6z$$

$$a = 1$$

$$\underline{u_ч = z^3}$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$
\begin{aligned}
&x = r\sin\theta\cos\varphi,\ r \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\\
&y = r\sin\theta\sin\varphi,\\
&z = r\cos\theta,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

в которой уравнение Лапласа имеет вид:

$$
\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\, u_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}\right]. \tag{2}
$$

$$
\boxed{u_ч = z^3 = r^3\cos^3\theta}
$$

②

$$u(r,\varphi) = u_ч + V(r,\varphi),$$

где $V(r,\varphi)$- решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta V = 0, \;\; r < 1; \\ V\big|_{r=1} = 2\sin^2\varphi \sin^2\theta + \cos^3\theta - u_ч\big|_{r=1} = 2\sin^2\varphi \sin^2\theta + \cos^3\theta - \cos^3\theta = 2\sin^2\varphi \sin^2\theta. \end{cases}$$

③

Согласно теории, решение в сферическом (шаровом) слое формально представляется в виде суммы ряда:

$$V(r,\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} v_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left[r^k Y_k^{\mathrm{I}} + \frac{1}{r^{k+1}} Y_k^{\mathrm{II}}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\begin{aligned} & r^k\left[\alpha_{0k}P_k + \sum_{n=1}^{k}(\alpha_{nk}\cos n\varphi + \beta_{nk}\sin n\varphi)P_k^{(n)}(\cos\theta)\right] + \\ & + \frac{1}{r^{k+1}}\left[\gamma_{0k}P_k + \sum_{n=1}^{k}(\gamma_{nk}\cos n\varphi + \eta_{nk}\sin n\varphi)P_k^{(n)}(\cos\theta)\right]\end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

где

$P_k(t) \equiv \dfrac{1}{2^k k!}\dfrac{d^k}{dt^k}\left(t^2 - 1\right)^k$ - **полиномы Лежандра** степени k,

$P_k^{(n)}(t) \equiv P_k^n(t) \equiv P_{nk}(t) \equiv \left(1 - t^2\right)^{n/2}\dfrac{d^n}{dt^n}P_k(t)$ - **присоединенная функция Лежандра** порядка k.

Замечание.

Для классического решения для задачи в шаре

$$V(r,\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} v_k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Y_k^{\mathrm{I}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} r^k \left[\alpha_{0k} P_k + \sum_{n=1}^{k} (\alpha_{nk} \cos n\varphi + \beta_{nk} \sin n\varphi) P_k^{(n)} \cos\theta \right]. \qquad (2\text{in})$$

Разложим ГУ по сферическим функциям Y_k^{I}:

$$V\big|_{r=1} = (2\sin^2\varphi)\sin^2\theta = (1-\cos 2\varphi)\sin^2\theta = \underset{n=0}{\sin^2\theta} - \underset{n=2}{\cos 2\varphi \sin^2\theta}$$

④

ШПАРГАЛКА

Для $n=0$: $P_k^{(0)} = P_k$, в частности,

$$P_0(t)=1,$$
$$P_1(t)=t=\cos\theta\ ,$$
$$P_2(t)=\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)=\frac{1}{4}\left(3\cos 2\theta+1\right),$$
$$P_3(t)=\frac{1}{2}\left(5t^3-3t\right)=\frac{1}{8}\left(5\cos 3\theta+3\cos\theta\right);$$

для $n=1$: $P_k^{(1)}(t)=\sqrt{1-t^2}\,\frac{d}{dt}P_k(t)$, в частности,

$$P_1^{(1)}(t)=\sqrt{1-t^2}=\sin\theta\,,$$
$$P_2^{(1)}(t)=3t\sqrt{1-t^2}=\frac{3}{2}\sin 2\theta;$$
$$P_3^{(1)}(t)=\frac{15t^2-3}{2}\sqrt{1-t^2}=\frac{3}{8}\left(5\sin 3\theta+\sin\theta\right);$$

для $n=2$: $P_k^{(2)}(t)=\left(1-t^2\right)\dfrac{d^2}{dt^2}P_k(t)$, в частности,

$$P_2^{(2)}(t)=3\left(1-t^2\right)=\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)=3\sin^2\theta,$$

$$P_3^{(2)}(t)=15t\left(1-t^2\right)=\frac{15}{4}(\cos\theta-\cos 3\theta);$$

для 3: $P_k^{(3)}(t)=\left(1-t^2\right)\dfrac{d^3}{dt^3}P_k(t)$, в частности,

$$P_2^{(3)}(t)=15\left(1-t^2\right)^{3/2}=\frac{15}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)=15\sin^3\theta.$$

⑤

Разложим ГУ по полиномам и присоединенным функциям Лежандра:

$$t^2 = \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

<u>$n = 0$</u>

$$P_2(t) = \frac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right) = 1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta \rightarrow$$

$$\frac{3}{2}\sin^2\theta = 1 - P_2(t) = P_0(t) - P_2(t)$$

<u>$n = 2$</u>

$$P_2^{(2)}(t) = 3\sin^2\theta$$

$$V\big|_{r=1} = \underset{n=0}{\sin^2}\theta - \cos 2\varphi \underset{n=2}{\sin^2}\theta = \frac{2}{3}\left(P_0(\cos\theta) - P_2(\cos\theta)\right) - \cos 2\varphi \cdot \frac{P_2^{(2)}(\cos\theta)}{3}$$

⑥

Решение будем искать в виде:

$$V(r,\varphi,\theta) = r^0\alpha_{00}P_0 + r^2\alpha_{02}P_2 + r^2\alpha_{22}\cos 2\varphi \cdot P_2^{(2)}$$

Из ГУ: $\alpha_{00}P_0 + \alpha_{02}P_2 + \alpha_{22}\cos 2\varphi \cdot P_2^{(2)} = \frac{2}{3}P_0 - \frac{2}{3}P_2 - \frac{1}{3}\cos 2\varphi \cdot P_2^{(2)} \rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_{00} = \frac{2}{3}, \\ \alpha_{02} = -\frac{2}{3}, \\ \alpha_{22} = -\frac{1}{3}, \end{cases} \rightarrow$$

$$V(r,\varphi,\theta) = \frac{2}{3}P_0 - \frac{2}{3}r^2P_2 - \frac{1}{3}r^2\cos 2\varphi \cdot P_2^{(2)}$$

$$V(r,\varphi,\theta)=\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{2}{3}r^2\cdot\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)-\frac{1}{3}r^2\cos 2\varphi\cdot 3(1-\cos^2\theta)$$

⑦

ОТВЕТ:

$$u(r,\varphi)=u_ч+V(r,\varphi)=r^3\cos^3\theta+\frac{2}{3}-\frac{r^2}{6}(3\cos 2\theta+1)-r^2\cos 2\varphi\sin^2\theta.$$