МЕТОД ФУРЬЕ вне ШАРА 2.

Решите краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{1}{r^4}, \quad r > 2,$$

$$\left(u - u_r\right)\Big|_{r=2} = \sin\theta \cos^2\frac{\theta}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right), \qquad u(\infty) = 0.$$

📖 👓✏ Уроев стр. 263 – 291 (пример 1 стр. 287 –288, пример 2 стр. 288-289, пример 3 стр. 289- 291)

Пальцев Б.В. Сферические функции. МФТИ. Учебно-методическое пособие. Стр. 3- 49

Тихонов, Самарский. УМФ Со стр. 709

Фарлоу. У с ЧП для научных работников и инженеров. Стр. 264 – 273

Михайлов со стр. 83

Кошляков стр. 380

①

Замена независимого переменного[1]:

$$\frac{\pi}{6} - \varphi = \phi$$

$$\left|\begin{array}{l} \Delta u = \dfrac{1}{r^4}, \ \ r > 2, \\[2em] \left.(u - u_r)\right|_{r=2} = \sin\theta \cos^2\dfrac{\theta}{2}\sin\phi, \qquad\qquad u(\infty) = 0. \end{array}\right.$$

[1] существенно облегчает выкладки

В сферических координатах:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ r \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi, \tag{1}$$

$$z = r\cos\theta,$$

уравнение Лапласа имеет вид:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\, u_\theta\right)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}\right]. \tag{2}$$

Замена зависимого переменного, приводящая к однородному ДуЧП:

частное решение удобно искать в виде:

$$u_ч = f(r)$$

$$\Delta u_ч = u_{ч\,rr} + \frac{2}{r} u_{ч\,r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} u_ч = f_{rr} + \frac{2}{r} f_r = \frac{1}{r^4}$$

$r^2 f_{rr} + 2r f_r = \dfrac{1}{r^2}$ - уравнение Эйлера.

Характеристическое уравнение $\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha = 0$.

$$\alpha^2 - \alpha + 2\alpha = 0 \rightarrow$$

$$\alpha(\alpha + 1) = 0 \rightarrow$$

$$f_{од} = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

резонанса нет:

$$f_ч = \frac{a}{r^2}, \qquad f_ч{}' = -2\frac{a}{r^3}, \qquad f_ч{}'' = 6\frac{a}{r^4};$$

$$r^2 6\frac{a}{r^4} + 2r\left(-2\frac{a}{r^3}\right) = \frac{1}{r^2},$$

$$6a - 4a = 1,$$

$$a = \frac{1}{2},$$

$$f_ч = \frac{1}{2r^2}$$

$$\underline{f(r) = C_1 + \frac{C_2}{r} + \frac{1}{2r^2}}.$$

- Проще всего положить

$$C_1 = C_2 = 0.$$

- Удобно

$$\left.\left(f - f_r\right)\right|_{r=2} = 0.$$

$$0 = \left.\left(C_1 + \frac{C_2}{r} + \frac{1}{2r^2} - \left(C_1 + \frac{C_2}{r} + \frac{1}{2r^2}\right)_r\right)\right|_{r=2} = \left.\left(C_1 + \frac{C_2}{r} + \frac{1}{2r^2} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{2}{2r^3}\right)\right|_{r=2} =$$

$$= C_1 + \frac{C_2}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{C_2}{4} + \frac{1}{2^3} = C_1 + \frac{3C_2}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$u(\infty) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{u_ч = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{3r}}$$

②

$$u(r,\varphi) = u_ч + V(r,\varphi),$$

где $V(r,\varphi)$- решение краевой задачи

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta V = 0, \;\; r > 2; \\ \left(V - V_r\right)\Big|_{r=2} = \sin\theta \cos^2\dfrac{\theta}{2}\sin\phi, \qquad\qquad V(\infty) = 0. \end{array}\right.$$

③

Согласно теории, решение в сферическом (шаровом) слое формально представляется в виде суммы ряда:

$$V(r,\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} v_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left[r^k Y_k^{\mathrm{I}} + \frac{1}{r^{k+1}} Y_k^{\mathrm{II}}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\begin{aligned}&r^k\left[\alpha_{0k}P_k + \sum_{n=1}^{k}(\alpha_{nk}\cos n\varphi + \beta_{nk}\sin n\varphi)P_k^{(n)}(\cos\theta)\right] + \\ &+\frac{1}{r^{k+1}}\left[\gamma_{0k}P_k + \sum_{n=1}^{k}(\gamma_{nk}\cos n\varphi + \eta_{nk}\sin n\varphi)P_k^{(n)}(\cos\theta)\right]\end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

где

$P_k(t) \equiv \dfrac{1}{2^k k!}\dfrac{d^k}{dt^k}\left(t^2-1\right)^k$ - **полиномы Лежандра** степени k,

$P_k^{(n)}(t) \equiv P_k^n(t) \equiv P_{nk}(t) \equiv \left(1-t^2\right)^{n/2}\dfrac{d^n}{dt^n}P_k(t)$ - **присоединенная функция Лежандра** порядка k.

Замечание.

Для решения задачи вне шара

$$V(r,\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} v_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{k+1}} Y_k^{\mathrm{I}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{k+1}} \left[\gamma_{0k} P_k + \sum_{n=1}^{k} (\gamma_{nk} \cos n\varphi + \eta_{nk} \sin n\varphi) P_k^{(n)} \cos\theta \right]. \qquad \text{(2out)}$$

Разложим ГУ по сферическим функциям Y_k^{I}:

$$(V - V_r)\big|_{r=2} = \sin\theta \frac{\cos\theta + 1}{2} \sin\phi = \frac{1}{4} \underset{n=1}{\sin 2\theta} \sin\phi + \frac{1}{2} \underset{n=1}{\sin\theta} \sin\phi /$$

④

ШПАРГАЛКА

Для $n=0$: $P_k^{(0)}=P_k$, в частности,

$$P_0(t)=1,$$
$$P_1(t)=t=\cos\theta\ ,$$
$$P_2(t)=\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)=\frac{1}{4}\left(3\cos 2\theta+1\right),$$
$$P_3(t)=\frac{1}{2}\left(5t^3-3t\right)=\frac{1}{8}\left(5\cos 3\theta+3\cos\theta\right);$$

для $n=1$: $P_k^{(1)}(t)=\sqrt{1-t^2}\,\frac{d}{dt}P_k(t)$, в частности,

$$P_1^{(1)}(t)=\sqrt{1-t^2}=\sin\theta\,,$$
$$P_2^{(1)}(t)=3t\sqrt{1-t^2}=\frac{3}{2}\sin 2\theta\,;$$
$$P_3^{(1)}(t)=\frac{15t^2-3}{2}\sqrt{1-t^2}=\frac{3}{8}\left(5\sin 3\theta+\sin\theta\right);$$

для $n = 2$: $P_k^{(2)}(t) = (1 - t^2)\frac{d^2}{dt^2} P_k(t)$, в частности,

$$P_2^{(2)}(t) = 3(1 - t^2) = \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta) = 3\sin^2\theta,$$

$$P_3^{(2)}(t) = 15t(1 - t^2) = \frac{15}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta);$$

для 3: $P_k^{(3)}(t) = (1 - t^2)\frac{d^3}{dt^3} P_k(t)$, в частности,

$$P_2^{(3)}(t) = 15(1 - t^2)^{3/2} = \frac{15}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) = 15\sin^3\theta.$$

⑤

Разложим ГУ по полиномам и присоединенным функциям Лежандра:

$$t^2 = \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$\underline{n=1}$

$$\sin 2\theta = \frac{2}{3} P_2^{(1)}(\cos\theta)$$

$$\sin\theta = P_1^{(1)}(\cos\theta)$$

→

$$\left(V - V_r\right)\Big|_{r=2} = \frac{1}{4}\frac{2}{3} P_2^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi + \frac{1}{2} P_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi =$$

$$= \frac{1}{2} P_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi + \frac{1}{6} P_2^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi$$

⑥

Решение будем искать в виде:

$$V(r,\varphi,\theta) = \frac{\eta_{11}}{r^2} P_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi + \frac{\eta_{12}}{r^3} P_2^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi$$

$$V_r(r,\varphi,\theta) = -\frac{2\eta_{11}}{r^3} P_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi - \frac{3\eta_{12}}{r^4} P_2^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi$$

Из ГУ:

$$\left(\frac{\eta_{11}}{2^2} + \frac{2\eta_{11}}{2^3}\right) P_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi + \left(\frac{\eta_{12}}{2^3} + \frac{3\eta_{12}}{2^4}\right) P_2^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi =$$

$$= \frac{1}{2} P_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi + \frac{1}{6} P_2^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi$$

→

$$\begin{cases} \dfrac{\eta_{11}}{2} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{5\eta_{12}}{16} = \dfrac{1}{6}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \eta_{11} = 1, \\ \eta_{12} = \dfrac{8}{15}. \end{cases}$$

$$V(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{r^2} P_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi + \frac{8}{15r^3} P_2^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi$$

$$V(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{r^2}\sin\theta\sin\phi + \frac{8}{15r^3}\frac{3}{2}\sin 2\theta\sin\phi$$

⑦

ОТВЕТ:

$$u(r,\varphi)=u_ч+V(r,\varphi)=\frac{1}{2r^2}-\frac{1}{3r}+\frac{1}{r^2}\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)+\frac{4}{5r^3}\sin 2\theta\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right).$$