

МЕТОД ФУРЬЕ вне ШАРА 3.

Решите краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{\cos \varphi \sin \theta}{r^4}, \quad r > 1,$$

$$u|_{r=1} = \cos^2 \theta, \quad u(\infty) = 0.$$

   Уроев стр. 263 – 291 (пример 1 стр. 287 –288, пример 2 стр. 288-289, пример 3 стр. 289- 291)

Пальцев Б.В. Сферические функции. МФТИ. Учебно-методическое пособие. Стр. 3- 49

Тихонов, Самарский. УМФ Со стр. 709

Фарлоу. У с ЧП для научных работников и инженеров. Стр. 264 – 273

Михайлов со стр. 83

Кошляков стр. 380

①

В сферических координатах:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi, \tag{1}$$

$$z = r \cos \theta,$$

уравнение Лапласа имеет вид:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} \right]. \tag{2}$$

Замена зависимого переменного, приводящая к однородному ДуЧП.

$$\begin{aligned}\Delta_{\theta\varphi} \cos \varphi \sin \theta &= \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta (\cos \varphi \sin \theta))_{\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} (\cos \varphi \sin \theta)_{\varphi\varphi} = \\ &= \frac{1}{\sin \theta} (\cos \varphi \sin \theta \cos \theta)_{\theta} - \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} = \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \left[\left(\frac{\sin 2\theta}{2} \right)_{\theta} - 1 \right] = \\ &= \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \left[\frac{2 \cos 2\theta}{2} - 1 \right] = \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} [-2 \sin^2 \theta] = -2 \cos \varphi \sin \theta - \text{с.ф.}\end{aligned}$$

частное решение будем искать в виде:

$$u_{\varphi} = f(r) \cos \varphi \sin \theta$$

$$\Delta u_u = \left[\left(f_{rr} + \frac{2}{r} f_r \right) - \frac{2}{r^2} f \right] \cos \varphi \sin \theta = \frac{\cos \varphi \sin \theta}{r^4}.$$

$$r^2 f_{rr} + 2r f_r - 2f = \frac{1}{r^2} \text{ - уравнение Эйлера.}$$

Характеристическое уравнение $\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - 2 = 0$.

$$\alpha^2 - \alpha + 2\alpha - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \rightarrow$$

$$(\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0 \rightarrow$$

$$f_{od} = rC_1 + \frac{C_2}{r^2}$$

резонанс:

$$f_u = \frac{a}{r^2} \ln r, \quad f_u' = -2 \frac{a}{r^3} \ln r + \frac{a}{r^3}, \quad f_u'' = 6 \frac{a}{r^4} \ln r - 2 \frac{a}{r^4} - 3 \frac{a}{r^4};$$

$$r^2 \left(6 \frac{a}{r^4} \ln r - 5 \frac{a}{r^4} \right) + 2r \left(-2 \frac{a}{r^3} \ln r + \frac{a}{r^3} \right) - \frac{a}{r^2} \ln r = \frac{1}{r^2},$$

$$-5a + 2a = 1,$$

$$a = -\frac{1}{3},$$

$$f_u = -\frac{1}{3r^2} \ln r$$

$$\underline{f(r) = rC_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{1}{3r^2} \ln r.}$$

- Проще всего положить

$$C_1 = C_2 = 0.$$

- Удобно

$$f|_{r=1} = 0.$$

$$0 = \left(rC_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{1}{3r^2} \ln r \right) \Big|_{r=1} = C_1 + C_2. \text{ 😞}$$

$$\text{😊 } u(\infty) = 0 \rightarrow$$

$$C_1 = 0 \rightarrow$$

$$C_2 = 0$$

$$u_\varphi = -\frac{1}{3r^2} \ln r \cos \varphi \sin \theta$$

②

$$u(r, \varphi) = u_q + V(r, \varphi),$$

где $V(r, \varphi)$ - решение краевой задачи

$$\left| \begin{array}{l} \Delta V = 0, \quad r > 1; \\ V|_{r=1} = \cos^2 \theta, \end{array} \right. \quad V(\infty) = 0.$$

③

Согласно теории, решение в сферическом (шаровом) слое формально представляется в виде суммы ряда:

$$\begin{aligned}
 V(r, \varphi, \theta) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} v_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[r^k Y_k^I + \frac{1}{r^{k+1}} Y_k^{II} \right] = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ r^k \left[\alpha_{0k} P_k + \sum_{n=1}^k (\alpha_{nk} \cos n\varphi + \beta_{nk} \sin n\varphi) P_k^{(n)}(\cos \theta) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r^{k+1}} \left[\gamma_{0k} P_k + \sum_{n=1}^k (\gamma_{nk} \cos n\varphi + \eta_{nk} \sin n\varphi) P_k^{(n)}(\cos \theta) \right] \right\}, \quad (3)
 \end{aligned}$$

где

$$P_k(t) \equiv \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k - \text{полиномы Лежандра степени } k,$$

$$P_k^{(n)}(t) \equiv P_k^n(t) \equiv P_{nk}(t) \equiv (1 - t^2)^{n/2} \frac{d^n}{dt^n} P_k(t) - \text{присоединенная функция Лежандра} \\
 \text{порядка } k.$$

Замечание.

Для решения задачи вне шара

$$\begin{aligned} V(r, \varphi, \theta) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} v_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{k+1}} Y_k^I = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{k+1}} \left[\gamma_{0k} P_k + \sum_{n=1}^k (\gamma_{nk} \cos n\varphi + \eta_{nk} \sin n\varphi) P_k^{(n)} \cos \theta \right]. \end{aligned} \quad (2out)$$

Разложим ГУ по сферическим функциям Y_k^I :

$$V|_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^2 \theta$$

④

ШПАРГАЛКА

Для $n = 0$: $P_k^{(0)} = P_k$, в частности,

$$P_0(t) = 1,$$

$$P_1(t) = t = \cos \theta,$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1),$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta);$$

для $n = 1$: $P_k^{(1)}(t) = \sqrt{1-t^2} \frac{d}{dt} P_k(t)$, в частности,

$$P_1^{(1)}(t) = \sqrt{1-t^2} = \sin \theta,$$

$$P_2^{(1)}(t) = 3t\sqrt{1-t^2} = \frac{3}{2} \sin 2\theta;$$

$$P_3^{(1)}(t) = \frac{15t^2 - 3}{2} \sqrt{1-t^2} = \frac{3}{8}(5 \sin 3\theta + \sin \theta);$$

для $n = 2$: $P_k^{(2)}(t) = (1-t^2) \frac{d^2}{dt^2} P_k(t)$, в частности,

$$P_2^{(2)}(t) = 3(1-t^2) = \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta) = 3 \sin^2 \theta,$$

$$P_3^{(2)}(t) = 15t(1-t^2) = \frac{15}{4}(\cos \theta - \cos 3\theta);$$

для $n = 3$: $P_k^{(3)}(t) = (1-t^2) \frac{d^3}{dt^3} P_k(t)$, в частности,

$$P_2^{(3)}(t) = 15(1-t^2)^{3/2} = \frac{15}{4}(3 \sin \theta - \sin 3\theta) = 15 \sin^3 \theta.$$

⑤

Разложим ГУ по полиномам и присоединенным функциям Лежандра:

$$t^2 = \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$n = 0$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$3 \cos^2 \theta = 2P_2(\cos \theta) + 1 = 2P_2(\cos \theta) + P_0(\cos \theta)$$

→

$$V|_{r=1} = \cos^2 \theta = \frac{1}{3}P_0(\cos \theta) + \frac{2}{3}P_2(\cos \theta).$$

⑥

Решение будем искать в виде:

$$V(r, \varphi, \theta) = \frac{\beta_{00}}{r} P_0(\cos \theta) + \frac{\beta_{02}}{r^3} P_2(\cos \theta)$$

Из ГУ:

$$\gamma_{00} P_0(\cos \theta) + \gamma_{02} P_2(\cos \theta) = \frac{1}{3} P_0(\cos \theta) + \frac{2}{3} P_2(\cos \theta)$$

→

$$\begin{cases} \gamma_{00} = \frac{1}{3}, \\ \gamma_{02} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$V(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{3r} P_0(\cos \theta) + \frac{2}{3r^3} P_2(\cos \theta)$$

$$V(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{3r} \cdot 1 + \frac{2}{3r^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{3r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^3} - \frac{1}{3r^3}$$

⑦

OTBET:

$$u(r, \varphi) = u_q + V(r, \varphi) = -\frac{1}{3r^2} \ln r \cos \varphi \sin \theta + \frac{1}{3r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^3} - \frac{1}{3r^3}.$$