МЕТОД ФУРЬЕ в КРУГЕ

ЗАДАЧА НЕЙМАНА

Решить задачу Неймана:

$$\Delta u = 9\sqrt{x^2+y^2} - 24xy, \quad r = \sqrt{x^2+y^2} < 1;$$

$$u_r\big|_{r=1} = 12\sin^2\varphi + \sin\varphi - 4\sin 2\varphi + \alpha, \quad (0 \le \varphi \le 2\pi),$$

где α - действительный параметр.

📖 👓✍ Уроев стр. 178 – 189 (**пример 1** стр. 181 –183, пример 2 стр. 184-186)
Фарлоу. У с ЧП для научных работников и инженеров. Стр. 248 – 264
Тихонов, Самарский со стр. 328

①

Сведем ДУ к однородному уравнению в полярной системе координат $\left(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\right)_1$:

$$\Delta u = 9\sqrt{x^2+y^2} - 24xy = 9\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} - 24r^2\cos\varphi\sin\varphi = 9r - 12r^2\sin 2\varphi$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 9r - 12r^2\sin 2\varphi$$

Т.к. 1 и $\sin 2\varphi$ - собственные функции оператора $\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, то частное решение будем искать, например, в виде:

$$u_ч = u_ч^{\ 1} + u_ч^{\ 2},$$

$$u_ч^{\ 1} = g(r),$$

$$u_ч^{\ 2} = f(r)\sin 2\varphi.$$

[1] Желательно найти такое частное решение, чтобы ГУ не стали сложнее.

$$\boxed{u_ч^{\ 1} = g(r)}$$

$$\Delta u_ч^{\ 1} = \Delta g(r) = \frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g(r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g(r)}{\partial \varphi^2} = g'' + \frac{1}{r}g' = 9r$$

$r^2 g'' + rg' = 9r^3$ - уравнение Эйлера.

$g_{од} = r^{\alpha}$

характеристическое уравнение $\alpha(\alpha - 1) + \alpha = 0 \rightarrow \alpha^2 = 0$ - резонанса нет,

какое-либо решение последнего уравнения можно искать в виде

$$g = Ar^3:$$

$$r^2 \cdot A \cdot 3 \cdot 2r + r \cdot A \cdot 3r^2 = 9r^3 \rightarrow$$

$$9A = 9 \rightarrow$$

$$A = 1$$

$$\boxed{u_ч^{\ 1} = r^3} \tag{1.1}$$

$$\boxed{u_ч{}^2 = f(r)\sin 2\varphi}$$

$$\Delta u_ч{}^2 = \Delta f(r)\sin 2\varphi = \left(\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r} - 4\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g(r)}{\partial \varphi^2}\right)\sin 2\varphi =$$

$$= \left(f'' + \frac{1}{r}f' - 4\frac{1}{r^2}f\right)\sin 2\varphi = -12r^2\sin 2\varphi$$

$r^2 f_{rr} + rf_r - 4f = -12r^4$ - уравнение Эйлера.

$f_{од} = r^{\alpha}$

характеристическое уравнение $\alpha(\alpha - 1) + \alpha - 4 = 0$ → $\alpha^2 = 4$ → $\alpha_{1,2} = \pm 2$ - резонанса нет,

Какое-либо решение последнего уравнения можно искать в виде

$$f = Ar^4:$$

$$r^2 \cdot A \cdot 4 \cdot 3r^2 + r \cdot A \cdot 4r^3 - 4Ar^4 = -12r^4 \rightarrow$$

$$12A = -12 \rightarrow$$

$$A = -1$$

$$\boxed{u_ч{}^2 = -r^4\sin 2\varphi} \qquad (1.2)$$

$$u_{ч} = u_{ч}^{1} + u_{ч}^{2} = r^{3} - r^{4}\sin 2\varphi$$

②

Поставим краевую задачу для однородного уравнения.

Т.к.

$$u = u_ч + V$$

(где введено обозначение $u_{од} \equiv V$ для краткости записи),

т.е. $V = u - u_ч$, то

$$\begin{cases} \Delta V = 0, \\ V_r\big|_{r=1} = 12\sin^2\varphi + \sin\varphi - 4\sin 2\varphi + \alpha - (3 - 4\sin 2\varphi) = \left|2\sin^2\varphi = 1 - \cos 2\varphi\right| =[2] \\ \qquad = 3 + \alpha + \sin\varphi - 6\cos 2\varphi \end{cases} \qquad (2)$$

---

[2] $(u_ч)_r\big|_{r=1} = \left(r^3 - r^4 \sin 2\varphi\right)_r\big|_{r=1} = 3 - 4\sin 2\varphi$

③

ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Теорема. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ - ограниченная область, граница которой ∂G есть кусочно-гладкая поверхность, ориентированная внешними нормалями.

В $\overline{G} = G \cup \partial G$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$.

Тогда поток векторного поля $\vec{a}$ через границу области ∂G равен объемному интегралу от $\operatorname{div} \vec{a}$ по области G:

$$\iint\limits_{\partial G} (\vec{a}, \vec{n})\, ds = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \vec{a}\, d\vec{x}.$$

$\vec{a} = u\nabla v$

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}(u\nabla v) = \nabla(u\nabla v) = \nabla\left(\overset{\downarrow}{u}\nabla v\right) + \nabla\left(u\overset{\downarrow}{\nabla} v\right) = \nabla u\,\nabla v + u\,\Delta v$$

$$(\vec{a},\vec{n}) = u(\nabla v,\vec{n}) = u\,\frac{\partial v}{\partial n}$$

$$\iiint\limits_G u\,\Delta v d\vec{x} = -\iiint\limits_G \nabla u\,\nabla v d\vec{x} + \iint\limits_{\partial G} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,ds \qquad (1)$$

$$\iiint\limits_G (u\,\Delta v - v\,\Delta u)d\vec{x} = \iint\limits_{\partial G}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds \qquad (2)$$

$$\iiint\limits_G u\,\Delta u d\vec{x} = -\iiint\limits_G |\nabla u|^2\,d\vec{x} + \iint\limits_{\partial G} u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds \qquad (3)$$

$$\iiint\limits_G (u\,\Delta v - v\,\Delta u)d\vec{x} = \iint\limits_{\partial G}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds \qquad (2)$$

$u \equiv 1$,

$v = V$

$$\iiint\limits_G \Delta V d\vec{x} = \iint\limits_{\partial G}\frac{\partial V}{\partial n}ds$$

$\Delta V = 0$

$$\underline{\iint\limits_{\partial G}\frac{\partial V}{\partial n}ds = 0} \text{ -} \qquad (4)$$

необходимое условие разрешимости задачи Неймана.

Для нашей задачи

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{\partial G} = \left.V_r\right|_{r=1} = 3+\alpha+\sin\varphi-6\cos 2\varphi,$$

и необходимое условие разрешимости задачи Неймана приобретает вид:

$$\underline{\oint\limits_{r=1} V_r dl = \int\limits_0^{2\pi} \left(3+\alpha+\sin\varphi-6\cos 2\varphi\right)\cdot 1 d\varphi = 0}$$

$$0 = \int\limits_0^{2\pi} \left(3+\alpha+\sin\varphi-6\cos 2\varphi\right)d\varphi = \left.\left(\left(3+\alpha\right)\varphi-\cos\varphi-6\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\right|_0^{2\pi} = 2\pi\left(3+\alpha\right)$$

$$\boxed{\alpha=-3}$$

$$\left[\begin{array}{l} \Delta V = 0, \\ \left.V_r\right|_{r=1} = \sin\varphi - 6\cos 2\varphi \end{array}\right.$$

④

Решение ищем МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ в виде:

$$V(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \qquad (3)$$

Тогда

$$\Delta V = V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r^2}V_{\varphi\varphi} = R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0 \; .$$

Деля на $\frac{1}{r^2}R\Phi$, получаем:

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$ - постоянная разделения[3].

---

[3] Чтобы функция (3) была решением ДУ (2), последнее равенство должно удовлетворяться тождественно, т.е. для всех значений независимых переменных $r < 1$ и $0 \le \varphi < 2\pi$. Левая часть равенства является функцией только переменного *r*, а правая – только φ. Фиксируя, например, некоторое значение *r* и меняя φ (или наоборот), получим, что правая и левая части последнего равенства при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение.

Отсюда получаем два уравнения:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad (4)$$

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0. \qquad (5)$$

Из гладкости исходной функции u (а следовательно и V), следует, что $\Phi(\varphi) \in \mathrm{C}^2[0;2\pi]$,

причем[4]

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi),\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi).$$

4 При изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $V(r,\varphi)$ должна вернуться к исходному значению: $V(r,\varphi) = V(r,\varphi + 2\pi)$ (условие периодичности). Отсюда следует, что $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, т.е. $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией угла φ с периодом 2π.

$\lambda < 0,\ \Phi(\varphi) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$ - периодичности нет.

$\lambda = 0,\quad \Phi(\varphi) = C_1\varphi + C_2$ - периодичность при $C_1 = 0$, период произволен.

$\lambda > 0,\quad \Phi(\varphi) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\varphi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\varphi$- решение периодично, но нам требуется период 2π.

Учтем условия на концах:

$$\begin{cases} \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} C_1 = C_1 \cos\sqrt{\lambda}2\pi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}2\pi \\ \sqrt{\lambda}C_2 = -\sqrt{\lambda}C_1 \sin\sqrt{\lambda}2\pi + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\sqrt{\lambda}2\pi \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) - C_2 \sin\sqrt{\lambda}2\pi = 0 \\ C_1 \sin\sqrt{\lambda}2\pi + C_2\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) = 0 \end{cases}$$

- получили линейную однородную систему относительно C_1 и C_2.

Эта система нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$0=\begin{vmatrix} \left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) & -\sin\sqrt{\lambda}2\pi \\ \sin\sqrt{\lambda}2\pi & \left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) \end{vmatrix}=\left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right)^2+\sin^2\sqrt{\lambda}2\pi=$$

$$=1-2\cos\sqrt{\lambda}2\pi+\cos^2\sqrt{\lambda}2\pi+\sin^2\sqrt{\lambda}2\pi=2-2\cos\sqrt{\lambda}2\pi=2\left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right),$$

то есть $\cos\sqrt{\lambda}2\pi=1\Rightarrow\sqrt{\lambda}2\pi=2\pi k\Rightarrow\sqrt{\lambda}=k$.

Следовательно $\boxed{\lambda=k^2}$, $k\in\mathrm{N}$ - собственные значения оператора $-\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bullet$.

Выберем две линейно независимые собственные функции следующим образом:

$$\Phi_{k,1} = \cos k\varphi,$$

$$\Phi_{k,2} = \sin k\varphi.$$

Учитывая случай $\lambda = 0$

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi \qquad (6)$$

Уравнение (5)

$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$ - уравнение Эйлера.

Его решение ищем в виде $R(r) = r^{\alpha}$.

Характеристическое уравнение: $\alpha(\alpha - 1) + \alpha - k^2 = 0$.

$$\alpha^2 = k^2$$

$k = 0$, $\alpha_{1,2} = 0$ - кратный корень (кратность 2)

$$R_0(r) = C_1 + C_2 \ln r$$

$$k \neq 0,\ \alpha_{1,2} = \pm k,\ R_k(r) = C_1 r^k + C_2 \frac{1}{r^k}.$$

⑤

Решение КЗ для уравнения Лапласа (2) будем искать в виде функционального ряда с разделенными переменными r и φ:

$$\boxed{V(r,\varphi) = C_1 + C_2 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r^k}\left(D_k \cos k\varphi + F_k \sin k\varphi\right)} \quad (7)$$

Замечание. Для внутренней задачи (КЗ в круге) надо положить $C_2 = D_k = F_k = 0$, т.к. в противном случае $V(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ обращается в бесконечность при $r = 0$ и не является гармонической функцией в круге;

для внешней задачи (КЗ вне круга) - $C_1 = C_2 = A_k = B_k = 0$, поскольку решение внешней задачи должно быть ограничено на бесконечности.

⑥

Согласно МРП, решение КЗ (2) $V(r,\varphi)$ ищем в виде:

$$\left(\begin{array}{l} k=1,\ k=2; \\ \qquad\qquad A_k = D_k = F_k = 0; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad C_2 = 0 \end{array} \right)^{5}$$

$$\boxed{V(r,\varphi) = C_1 + B_1 r \sin\varphi + A_2 r^2 \cos 2\varphi} \tag{8}$$

[5] задача Неймана, поэтому $C_1 \neq 0$ даже если в ГУ нет нулевой гармоники

Из ГУ: $B_1 \sin\varphi + A_2 2\cos 2\varphi = \sin\varphi - 6\cos 2\varphi$

Откуда получаем $\begin{cases} B_1 = 1, \\ 2A_2 = -6 \end{cases}$

или

$$\begin{cases} B_1 = 1, \\ A_2 = -3, \\ C_1 - \forall. \end{cases}$$

Таким образом:

$$\boxed{V(r,\varphi) = C_1 + r\sin\varphi - 3r^2\cos 2\varphi}$$

⑦

Ответ:

$$\boxed{u = r^3 - r^4 \sin 2\varphi + C_1 + r \sin\varphi - 3r^2 \cos 2\varphi}$$