МЕТОД ФУРЬЕ в КРУГЕ

Решить краевую задачу:

$$\Delta u = 24xy, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1;$$

$$\left(u + u_r\right)\Big|_{r=1} = 2\sin\varphi - 3\sin 2\varphi, \quad \left(0 \le \varphi \le 2\pi\right).$$

🕮 👓✎ Уроев стр. 178 – 189 (**пример 1** стр. 181 –183, пример 2 стр. 184-186)
Фарлоу. У с ЧП для научных работников и инженеров. Стр. 248 – 264
Тихонов, Самарский со стр. 328

①

Сведем ДУ к однородному уравнению в полярной системе координат $\left(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\right)$[1]:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 12r^2\sin 2\varphi = 24r^2\cos\varphi\sin\varphi = 24xy$$

Т.к. $\sin 2\varphi$ - собственная функция оператора $\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$, то частное решение будем искать, например, в виде:

$$u_ч = f(r)\sin 2\varphi$$

$$\Delta u_ч = \sin 2\varphi\left(f_{rr} + \frac{1}{r}f_r - 4\frac{1}{r^2}f\right) = 12r^2\sin 2\varphi$$

---

[1] Желательно найти такое частное решение, чтобы ГУ не стали сложнее.

$$r^2 f_{rr} + r f_r - 4f = 12r^4$$

Какое-либо решение последнего уравнения можно искать в виде

$$f = Ar^4:$$

$$r^2 \cdot A \cdot 4 \cdot 3r^2 + r \cdot A \cdot 4r^3 - 4Ar^4 = 12r^4 \rightarrow$$

$$12A = 12 \rightarrow$$

$$A = 1$$

$$\boxed{u_ч = r^4 \sin 2\varphi} \qquad (1)$$

2

Поставим краевую задачу для однородного уравнения.

Т.к.

$$u = u_ч + V$$

(где введено обозначение $u_{од} \equiv V$ для краткости записи),

т.е. $V = u - u_ч$, то

$$\begin{cases} \Delta V = 0, \\ \left.\left(V + V_r\right)\right|_{r=1} = 2\sin\varphi - 3\sin 2\varphi - \left(\sin 2\varphi + 4\sin 2\varphi\right) = 2\sin\varphi - 8\sin 2\varphi \end{cases} \quad (2)$$ [2]

---

[2] $\left.\left(u_ч + \left(u_ч\right)_r\right)\right|_{r=1} = \left.\left(r^4 \sin 2\varphi + \left(r^4 \sin 2\varphi_ч\right)_r\right)\right|_{r=1} = \left(\sin 2\varphi + 4\sin 2\varphi\right)$

③

Решение ищем МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ в виде:

$$V(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \qquad (3)$$

Тогда

$$\Delta V = V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r^2}V_{\varphi\varphi} = R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0 \ .$$

Деля на $\frac{1}{r^2}R\Phi$, получаем:

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$ - постоянная разделения[3].

[3] Чтобы функция (3) была решением ДУ (2), последнее равенство должно удовлетворяться тождественно, т.е. для всех значений независимых переменных $r < 1$ и $0 \le \varphi < 2\pi$. Левая часть равенства является функцией только переменного *r*, а правая – только φ. Фиксируя, например, некоторое значение *r* и меняя φ (или наоборот), получим, что правая и левая части последнего равенства при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение.

Отсюда получаем два уравнения:

$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$, (4)

$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$. (5)

Из гладкости исходной функции u (а следовательно и V), следует, что $\Phi(\varphi) \in C^2[0;2\pi]$,

причем[4]

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi),\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi).$$

[4] При изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $V(r,\varphi)$ должна вернуться к исходному значению: $V(r,\varphi) = V(r,\varphi + 2\pi)$ (условие периодичности). Отсюда следует, что $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, т.е. $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией угла φ с периодом 2π.

$\lambda < 0,\ \Phi(\varphi) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$ - периодичности нет.

$\lambda = 0,\quad \Phi(\varphi) = C_1\varphi + C_2$ - периодичность при $C_1 = 0$, период произволен.

$\lambda > 0,\quad \Phi(\varphi) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\varphi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\varphi$- решение периодично, но нам требуется период 2π.

Учтем условия на концах:

$$\begin{cases} \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = C_1 \cos\sqrt{\lambda}2\pi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}2\pi \\ \sqrt{\lambda}C_2 = -\sqrt{\lambda}C_1 \sin\sqrt{\lambda}2\pi + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\sqrt{\lambda}2\pi \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) - C_2 \sin\sqrt{\lambda}2\pi = 0 \\ C_1 \sin\sqrt{\lambda}2\pi + C_2\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) = 0 \end{cases}$$

- получили линейную однородную систему относительно C_1 и C_2.

Эта система нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$0=\begin{vmatrix} \left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) & -\sin\sqrt{\lambda}2\pi \\ \sin\sqrt{\lambda}2\pi & \left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) \end{vmatrix} = \left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right)^2+\sin^2\sqrt{\lambda}2\pi =$$

$$=1-2\cos\sqrt{\lambda}2\pi+\cos^2\sqrt{\lambda}2\pi+\sin^2\sqrt{\lambda}2\pi=2-2\cos\sqrt{\lambda}2\pi=2\left(1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi\right),$$

то есть $\cos\sqrt{\lambda}2\pi=1 \Rightarrow \sqrt{\lambda}2\pi=2\pi k \Rightarrow \sqrt{\lambda}=k$.

Следовательно $\boxed{\lambda=k^2}$, $k\in\mathrm{N}$ - собственные значения оператора $-\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bullet$.

Выберем две линейно независимые собственные функции следующим образом:

$$\Phi_{k,1} = \cos k\varphi,$$

$$\Phi_{k,2} = \sin k\varphi.$$

Учитывая случай $\lambda = 0$

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi \qquad (6)$$

Уравнение (5)

$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$ - уравнение Эйлера.

Его решение ищем в виде $R(r) = r^{\alpha}$.

Характеристическое уравнение: $\alpha(\alpha - 1) + \alpha - k^2 = 0$.

$$\alpha^2 = k^2$$

$k = 0$, $\alpha_{1,2} = 0$ - кратный корень (кратность 2)

$$R_0(r) = C_1 + C_2 \ln r$$

$k \neq 0$, $\alpha_{1,2} = \pm k$, $R_k(r) = C_1 r^k + C_2 \dfrac{1}{r^k}$.

④

Решение КЗ для уравнения Лапласа (2) будем искать в виде функционального ряда с разделенными переменными r и φ:

$$\boxed{V(r,\varphi)= C_1 + C_2 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r^k}\left(D_k \cos k\varphi + F_k \sin k\varphi\right)} \quad (7)$$

Замечание. Для внутренней задачи (КЗ в круге) надо положить $C_2 = D_k = F_k = 0$, т.к. в противном случае $V(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ обращается в бесконечность при $r = 0$ и не является гармонической функцией в круге;

для внешней задачи (КЗ вне круга) - $C_1 = C_2 = A_k = B_k = 0$, поскольку решение внешней задачи должно быть ограничено на бесконечности.

⑤

Согласно МРП, решение КЗ (2) $V(r,\varphi)$ищем в виде:

$$\begin{pmatrix} k=1,\ k=2; & & \\ & A_k = D_k = F_k = 0; & \\ & & C_1 = C_2 = 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{V(r,\varphi) = B_1 r \sin\varphi + B_2 r^2 \sin 2\varphi} \tag{8}$$

Из ГУ: $B_1 \sin\varphi + B_2 \sin 2\varphi + B_1 \sin\varphi + B_2 2\sin 2\varphi = 2\sin\varphi - 8\sin 2\varphi$

Откуда получаем $\begin{cases} 2B_1 = 2 \\ 3B_2 = -8 \end{cases}$

или

$$\begin{cases} B_1 = 1 \\ B_2 = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Таким образом:

$$\boxed{V(r,\varphi) = r\sin\varphi - \frac{8}{3} r^2 \sin 2\varphi}$$

⑥

Ответ:

$$\boxed{u = r^4 \sin 2\varphi + r\sin\varphi - \frac{8}{3} r^2 \sin 2\varphi}$$