2000/2001 11

1④ $2u_{xx}+u_{xy}-u_{yy}+u_x+u_y=0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$;

$u\big|_{y=0}=1+\dfrac{x}{3}$, $u_y\big|_{y=0}=\dfrac{2}{3}$, $x\in\mathbb{R}^1$

Уроев стр. 18 – 27 (пример 2 стр. 23 – 27), стр. 33 – 42 (пример 1 стр. 34 – 36, пример 3 стр. 37 - 39)

① Общий вид квазилинейного уравнения второго порядка в $\mathbb{R}^2$:

$$A(x,y)u_{xx}+2B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0. \qquad (1)$$

В нашем случае: A=2, B=1/2, C=-1.

$D=4B^2-4AC$ =1-2(-1)>0 $\Rightarrow$ ДУ в рассматриваемой области относится к гиперболическому типу

② Уравнение характеристик (Уроев стр. 21) $\boxed{A(x,y)(dy)^2-2B(x,y)dxdy+C(x,y)(dx)^2=0}$

$$2(dy)^2-dxdy-(dx)^2=0$$

Предполагая, что вдоль характеристик $dx\neq 0$, перепишем это уравнение в следующем виде:

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{dy}{dx}-1=0\ . \qquad (2)$$

Далее вычисляем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 3}{4}.$$

Существует два различных решения квадратного уравнения (2):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=1 \quad \text{и} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2=-\frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Разделяя переменные и затем интегрируя, получаем связь между y и x для решений каждого из дифференциальных уравнений (3):

❶ $\dfrac{dy}{dx}=1$, $dy=dx$, $y=x+C_1$,

❷ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}$, $dy=-\dfrac{1}{2}dx$, $y=-\dfrac{x}{2}+C_2$,

где C_1 и C_2 произвольные постоянные. Следовательно, функции

$f_1(x,y)=x-y$ и $f_2(x,y)=x+2y$

постоянны для каждого решения $y=y(x)$ соответствующего уравнения (3), поэтому эти функции можно использовать для замены переменных

③ $\boxed{\xi=x-y,\quad \eta=x+2y}$ (4)

При замене (4) производные преобразуются следующим образом (по правилу дифференцирования сложной функции):

$$\frac{\partial}{\partial x}\bullet=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}\bullet+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}\bullet=1\frac{\partial}{\partial\xi}\bullet+1\frac{\partial}{\partial\eta}\bullet \qquad 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\bullet=-1\frac{\partial}{\partial\xi}\bullet+2\frac{\partial}{\partial\eta}\bullet \qquad 1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bullet=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\bullet+2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\bullet+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\bullet \qquad 2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\bullet=-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\bullet+(2-1)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\bullet+2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\bullet=-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\bullet+\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\bullet+2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\bullet \qquad 1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\bullet=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\bullet-4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\bullet+4\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\bullet \qquad -1$$

④ Найдем уравнение, которому будет удовлетворять функция $\tilde{u}(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$. В соответствии с теорией, коэффициенты при $\tilde{u}_{\xi\xi}$ и $\tilde{u}_{\eta\eta}$ равны нулю. Проверим это:

при $\tilde{u}_{\xi\xi}$ $\quad 2\cdot 1+1\cdot(-1)-1\cdot 1=0$ Ok!

при $\tilde{u}_{\eta\eta}$ $\quad 2\cdot 1+1\cdot 2-1\cdot 4=0$ Ok!

Вычислим остальные коэффициенты:

при $\tilde{u}_{\xi\eta}$ $\quad 2\cdot 2+1\cdot 1-1\cdot(-4)=9$

при $\tilde{u}_{\xi}$ $\quad 1\cdot 1+1\cdot(-1)=0$

при $\tilde{u}_{\eta}$ $\quad 1\cdot 1+1\cdot 2=3$

В итоге получаем уравнение

$9\tilde{u}_{\xi\eta}+3\tilde{u}_{\eta}=0$

или (канонический вид):

$$\boxed{3\tilde{u}_{\xi\eta}+\tilde{u}_{\eta}=0} \tag{5}$$

Отметим, что НУ заданы на прямой $y=0$*, ни в одной точке, не касающейся характеристик.*

⑤ В данном случае легко найти общий вид решения.

Сначала проинтегрируем уравнение (5) по переменной ξ, считая переменную η параметром, а $\tilde{u}_{\eta}(\xi,\eta)=v(\xi)$ - неизвестной функцией переменной ξ:

$3v_{\xi}+v=0$ - линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение: $3\lambda+1=0$

$$v=Ce^{-\frac{1}{3}\xi}=C(\eta)e^{-\frac{\xi}{3}}=\tilde{u}_{\eta}$$

или, разделяя переменные $3\dfrac{dv}{v}=-d\xi \to \ln|v|=-\dfrac{\xi}{3}+\tilde{C}\to v=Ce^{-\frac{1}{3}\xi}=C(\eta)e^{-\frac{\xi}{3}}=\tilde{u}_{\eta}$

здесь $C=C(\eta)$ - произвольная (непрерывная с учетом непрерывности $\tilde{u}_{\eta}$) функция параметра η, т.к. при каждом значении η постоянная интегрирования получается произвольной.

Далее, проинтегрируем последнее соотношение по переменной η, считая на этот раз ξ параметром:

$$\boxed{\tilde{u}=\varphi(\eta)e^{-\frac{\xi}{3}}+\psi(\xi)},$$

здесь $\varphi(\eta)$ - произвольная функция переменной η, полученная интегрированием функции $C(\eta)$,

$\psi(\xi)$ - произвольная функция переменной ξ, которая получается при фиксированном ξ как постоянная при интегрировании по переменной η.

Возвращаясь к исходным переменным и учитывая, что $\tilde{u}(\xi,\eta)$ - произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, находим:

$$\boxed{u(x,y)=\varphi(x+2y)e^{-\frac{(x-y)}{3}}+\psi(x-y)}, \tag{6}$$

где $\varphi(\eta)$ и $\psi(\xi)$ - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов ξ и η.

⑥ Найдем эти функции из НУ (начальных условий):

$$u(x,0)=\varphi(x)e^{-\frac{x}{3}}+\psi(x)=1+\frac{x}{3} \tag{7}$$

$$u_y(x,0)=2\varphi'(x)e^{-\frac{x}{3}}+\frac{1}{3}\varphi(x)e^{-\frac{x}{3}}-\psi'(x)=\frac{2}{3} \tag{8}$$

$\dfrac{d}{dx}$(7): $$\varphi'(x)e^{-\frac{x}{3}}-\frac{1}{3}\varphi(x)e^{-\frac{x}{3}}+\psi'(x)=\frac{1}{3} \tag{9}$$

(8)+(9): $$3\varphi'(x)e^{-\frac{x}{3}}=1\to\varphi'(x)=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\to\varphi(x)=e^{\frac{x}{3}}+\hat{C}$$

из (7) $$\psi(x)=1+\frac{x}{3}-\varphi(x)e^{-\frac{x}{3}}=1+\frac{x}{3}-\left(e^{\frac{x}{3}}+\hat{C}\right)e^{-\frac{x}{3}}=1+\frac{x}{3}-1+\hat{C}e^{-\frac{x}{3}}=\frac{x}{3}+\hat{C}e^{-\frac{x}{3}}$$

т.о. $u(x,y)=\left(e^{\frac{x+2y}{3}}+\hat{C}\right)e^{-\frac{(x-y)}{3}}+\dfrac{x-y}{3}+\hat{C}e^{-\frac{(x-y)}{3}}$

Ответ: $\boxed{u(x,y)=e^{y}+\dfrac{x-y}{3}}$