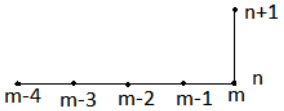
Методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему, аппроксимирующую уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\ u(0,x)=\varphi(x);\ 0\le t\le x;\ -\infty\le x\le\infty$ на сетке $D_h=\left\{(t^n,x_m): t^n=n\tau,\tau N=1, n=0\div N; x_m=mh, h=const, m=0;\pm1;\pm2;...\right\}$ в точке $\{m,n\}$, используя заданный шаблон. Указать порядок аппроксимации.




Перепишем ДУЧП в виде $\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$.

Запишем теперь для него на указанном шеститочечном шаблоне разностное уравнение с неопределенными коэффициентами: $a_1u_m^{n+1}+a_2u_m^n+a_3u_{m-1}^n+a_4u_{m-2}^n+a_5u_{m-3}^n+a_6u_{m-4}^n=0$.

Воспользуемся разложением проекции точного решения на сетку по формуле Тейлора:

$$u_m^{n+1}=u_m^n+\tau(u_t)_m^n+\frac{\tau^2}{2}(u_{tt})_m^n+O(\tau^3),$$

$$u_{m-k}^n=u_m^n-kh(u_x)_m^n+\frac{(kh)^2}{2}(u_{xx})_m^n-\frac{(kh)^3}{3!}(u_{xxx})_m^n+\frac{(kh)^4}{4!}(u_{xxxx})_m^n+O(h^5):$$

$$a_1\left[u_m^n+\tau(u_t)_m^n+\frac{\tau^2}{2}(u_{tt})_m^n+O(\tau^3)\right]+a_2u_m^n+$$
$$+a_3\left[u_m^n-h(u_x)_m^n+\frac{(h)^2}{2}(u_{xx})_m^n-\frac{(h)^3}{6}(u_{xxx})_m^n+\frac{(h)^4}{24}(u_{xxxx})_m^n+O(h^5)\right]+$$
$$+a_4\left[u_m^n-2h(u_x)_m^n+\frac{(2h)^2}{2}(u_{xx})_m^n-\frac{(2h)^3}{6}(u_{xxx})_m^n+\frac{(2h)^4}{24}(u_{xxxx})_m^n+O(h^5)\right]+$$
$$+a_5\left[u_m^n-3h(u_x)_m^n+\frac{(3h)^2}{2}(u_{xx})_m^n-\frac{(3h)^3}{6}(u_{xxx})_m^n+\frac{(3h)^4}{24}(u_{xxxx})_m^n+O(h^5)\right]+$$
$$+a_6\left[u_m^n-4h(u_x)_m^n+\frac{(4h)^2}{2}(u_{xx})_m^n-\frac{(4h)^3}{6}(u_{xxx})_m^n+\frac{(4h)^4}{24}(u_{xxxx})_m^n+O(h^5)\right]=[u_t]_m^n-[u_{xxxx}]_m^n.$$

Составляем систему из 6 уравнений для 6 неизвестных:

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0,\\ a_1\tau=1,\\ -ha_3-2ha_4-3ha_5-4ha_6=0,\\ \frac{h^2}{2}a_3+\frac{(2h)^2}{2}a_4+\frac{(3h)^2}{2}a_5+\frac{(4h)^2}{2}a_6=0,\\ -\frac{h^3}{6}a_3-\frac{(2h)^3}{6}a_4-\frac{(3h)^3}{6}a_5-\frac{(4h)^3}{6}a_6=0,\\ \frac{h^4}{24}a_3+\frac{(2h)^4}{24}a_4+\frac{(3h)^4}{24}a_5+\frac{(4h)^4}{24}a_6=-1\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=-\frac{1}{\tau},\\ a_1=\frac{1}{\tau},\\ a_3+2a_4+3ha_5+4a_6=0,\\ a_3+4a_4+9a_5+16a_6=0,\\ a_3+8a_4+27a_5+64a_6=0,\\ a_3+16a_4+81a_5+256a_6=-\frac{24}{h^4}.\end{cases}$$

При этом $(u_t)_m^n+O(\tau)-(u_{xxxx})_m^n+O(h)=[u_t]_m^n-[u_{xxxx}]_m^n$, т.е. порядок аппроксимации будет $\boxed{O(\tau,h)}$.

Целесообразно последние четыре уравнения системы рассмотреть отдельно:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\\1&16&81&256\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-\dfrac{24}{h^4}\end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\1&4&9&16&0\\1&8&27&64&0\\1&16&81&256&-\dfrac{24}{h^4}\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{(2)-(1)\\(3)-(2)\\(4)-(3)}]{(1)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\0&2&6&12&0\\0&4&18&48&0\\0&8&54&192&-\dfrac{24}{h^4}\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{(2)/2\\(3)-2(2)\\(4)-2(3)}]{(1)-(2)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-3&-8&0\\0&1&3&6&0\\0&0&6&24&0\\0&0&18&96&-\dfrac{1}{h^4}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{(2)-(3)/2\\(3)/6\\(4)-3(3)}]{(1)+(3)/2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&4&0\\0&1&0&-6&0\\0&0&1&4&0\\0&0&0&24&-\dfrac{24}{h^4}\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{(2)+(4)/4\\(3)/6\\(4)/24}]{(1)-(4)/6}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&\dfrac{4}{h^4}\\0&1&0&0&-\dfrac{6}{h^4}\\0&0&1&0&\dfrac{4}{h^4}\\0&0&0&1&-\dfrac{1}{h^4}\end{array}\right),\ \text{т.о.}\ \boxed{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\frac{1}{h^4}\begin{pmatrix}4\\-6\\4\\-1\end{pmatrix}},$$

и $a_2=-\dfrac{1}{\tau}-\left(a_3+a_4+a_5+a_6\right)=-\dfrac{1}{\tau}-\dfrac{1}{h^4}$.

Подставляя найденные значения, получаем:

$$\frac{1}{\tau}u_m^{n+1}-\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{h^4}\right)u_m^n+\frac{4}{h^4}u_{m-1}^n+\frac{-6}{h^4}u_{m-2}^n+\frac{4}{h^4}u_{m-3}^n+\frac{-1}{h^4}u_{m-4}^n=0$$

или

$$\boxed{\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}-\frac{u_m^n-4u_{m-1}^n+6u_{m-2}^n-4u_{m-3}^n+u_{m-4}^n}{h^4}=0}.$$