Доказать, что $\max\limits_{1\le i\le n}\{|x_1|,\,|x_1+x_2|\}$ есть норма вектора $\vec{x}$.

Найти норму матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, подчиненную этой векторной норме.

Заметим, что для $\vec{y}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\vec{x}$, где $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=1\ne 0$,

$\max\limits_{1\le i\le n}\{|x_1|,\,|x_1+x_2|\}=\max\limits_{1\le i\le n}\{|y_1|,\,|y_2|\}=\|\vec{y}\|_1$.

Поэтому $\max\limits_{1\le i\le n}\{|x_1|,\,|x_1+x_2|\}=\|\vec{x}\|_*$.

ЗАМЕЧАНИЕ: можно непосредственно проверить выполнение всех аксиом нормы.
Поэтому

$$\|A\|_*\overset{def}{=}\sup_{\vec{x}\ne\vec{0}}\frac{\|A\vec{x}\|_*}{\|\vec{x}\|_*}=\sup_{\vec{x}\ne\vec{0}}\frac{\|A\vec{x}\|_*}{\|\vec{x}\|_*}.$$

Обозначим матрицу $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=S$.

Тогда $\|A\|_*=\sup\limits_{\vec{x}\ne\vec{0}}\dfrac{\|SA\vec{x}\|_1}{\|S\vec{x}\|_1}$.

Так как $\vec{x}=S^{-1}\vec{y}$, получаем

$$\|A\|_*=\sup_{\vec{y}\ne\vec{0}}\frac{\|SAS^{-1}\vec{y}\|_1}{\|\vec{y}\|_1}\overset{def}{=}\|SAS^{-1}\|_1.$$

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$SAS^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 6\end{pmatrix}.$$

Так как $\|D\|_1=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|$, то

$$\|A\|_*=\|SAS^{-1}\|_1=\max(3,\,8)=8.$$