2002/2003 21

2④ Найти все особые точки функции $f(z)=\dfrac{z\cdot e^{1/\sin z}}{(2z+\pi)\sin z\cdot\cos 2z}$, определить их тип. Ответ обосновать.

Шабунин, Сидоров стр. 64 – 70 (примеры 9 - 13 стр. 68 – 72), Половинкин стр. 85 – 95 (примеры 1 - 4 стр. 91 – 93)

① $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функция $\psi(z)$ регулярна при всех z. Поэтому особые точки функции $f(z)$ определяютя особыми точками функции $\varphi(z)$ и нулями знаменателя $\psi(z)$.

Кандидаты в особые точки: $z=0$, $z=\pi j$ при $j=\pm1,\pm2,\ldots$,

$z=\infty$,

$$\left.\begin{aligned}&z=-\frac{\pi}{2},\\&z=\pi k, && k=0,\pm1,\pm2,\ldots,\\&z=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right), && n=0,\pm1,\pm2,\ldots.\end{aligned}\right\}\text{ - нули знаменателя.}$$

② а) Покажем, что точка $z=0$ является существенно особой[1] для функции $\varphi(z)$:

пусть $z_l=\dfrac{1}{l}$, тогда $\lim\limits_{l\to\infty}z_l=0$, а $\lim\limits_{l\to\infty}\dfrac{1}{\sin(z_l)}=+\infty$, т.е. $\lim\limits_{l\to\infty}e^{\frac{1}{\sin(z_l)}}=+\infty$;

пусть теперь $z_m=-\dfrac{1}{m}$, тогда $\lim\limits_{m\to\infty}z_m=0$, а $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{\sin(z_m)}=-\infty$, т.е. $\lim\limits_{m\to\infty}e^{\frac{1}{\sin(z_m)}}=0$.

Отметим попутно, что $\dfrac{z}{\sin z}\xrightarrow[z\to0]{}1$.

Следовательно, $\boxed{z=0\text{ - СОТ}}$ для $f(z)$.

б) Аналогично, покажем, что точки $z_j=\pi j$ при $j=0,\pm1,\pm2,\ldots$[2] являются существенно особыми для функции $\varphi(z)$:

пусть $z_{jl}=\pi j+\dfrac{1}{l}$, тогда $\lim\limits_{l\to\infty}z_{jl}=\pi j$, а $\lim\limits_{l\to\infty}\dfrac{1}{\sin(z_{jl})}=\begin{cases}+\infty, & j=2i\\-\infty, & j=2i-1\end{cases}$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$, т.е.

$\lim\limits_{l\to\infty}e^{\frac{1}{\sin(z_{jl})}}=\begin{cases}+\infty, & j=2i\\0, & j=2i-1\end{cases}$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$;

пусть теперь $z_{jm}=\pi j-\dfrac{1}{m}$, тогда $\lim\limits_{m\to\infty}z_{jm}=\pi j$, а $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{\sin(z_{jm})}=\begin{cases}-\infty, & j=2i\\+\infty, & j=2i-1\end{cases}$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$, т.е.

$\lim\limits_{m\to\infty}e^{\frac{1}{\sin(z_{ml})}}=\begin{cases}0, & j=2i\\+\infty, & j=2i-1\end{cases}$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$,.

Отметим попутно, что $\dfrac{z}{\sin z}\xrightarrow[z\to\pi j]{}\infty$. Но $\lim\limits_{u\to\infty}ue^{|u|}=\infty$, а $\lim\limits_{u\to\infty}ue^{-|u|}=\pm\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{e^u}\overset{пр.\,Лопиталя}{=}\pm\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{e^u}=0$

Следовательно, $\boxed{z_j=\pi j,\ j=0,\pm1,\pm2,\ldots\text{ - СОТ}}$ для $f(z)$.

③ Оставшиеся нули знаменателя не совпадают с нулями числителя и являются полюсами[3] функции $f(z)$. Определим их порядок.

---

[1] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***существенно особой точкой***, если не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a}f(z)$.

[2] Предыдущий случай можно было и не рассматривать отдельно.

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.

❶ $z=-\frac{\pi}{2}$ - нуль первого порядка функции $\psi(z)$, т.к. в этой точке числитель $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$, то для функции $f(z)$ точка $\boxed{z=-\frac{\pi}{2} \text{ - полюс 1-го порядка}}$ (ПП – простой полюс).

❷ Рассмотрим точки $z=\frac{\pi}{4}(1+2n),\ n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$ - нули $\psi(z)=h(z)\cos 2z$, где $h(z)=(2z+\pi)\sin z$. Т.к. $\psi'(z)=h'(z)\cos 2z-2h(z)\sin 2z$, то $\psi'\left(\frac{\pi(1+2n)}{4}\right)=-2h\left(\frac{\pi(1+2n)}{4}\right)\sin 2\frac{\pi(1+2n)}{4}=$
$=-\left(2\frac{\pi(1+2n)}{4}+\pi\right)\sin\frac{\pi(1+2n)}{4}\sin\frac{\pi(1+2n)}{2}\neq 0$, то это нули первого порядка знаменателя.

Таким образом, $\boxed{z=\frac{\pi}{4}(1+2n),\ n=0,\pm 1,\pm 2,\dots \text{ - полюсы 1-го порядка}}$ (ПП – простые полюсы) для функции $f(z)$.

④ $\boxed{z=\infty \text{ - неизолированная особая точка}}$ (НОТ)[4], т.к. в любой ее окрестности есть ПП $z=\frac{\pi}{4}(1+2n),\ n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$.

[4] **Определение**. Пусть функция f определена и регулярна в проколотой окрестности точки $a\in\overline{\mathbb{C}}$, т.е. на множестве $\overset{\circ}{B}_{\rho}(a)$, $\rho>0$. Тогда точку a называют ***изолированной особой точкой (однозначного характера) функции*** f.