См. **Петров, Лобанов стр. 29 пример 4**

**Пример.** Оценить погрешность в определении корней уравнения $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$, если величины $a$, $b$, $c$ и $d$ заданы с точностью $\Delta(a) = \varepsilon_a$, $\Delta(b) = \varepsilon_b$, $\Delta(c) = \varepsilon_c$ и $\Delta(d) = \varepsilon_d$.

**Решение.** Рассмотрим неявно заданную функцию $f(y,a,b,c,d) = ay^3 + by^2 + cy + d = 0$.

Дифференцируя $f(y,a,b,c,d)$ по $a$, $b$, $c$ и $d$ получим соответственно

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial a} = \left(3ay^2 + 2by + c\right)y'_a + y^3 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial b} = \left(3ay^2 + 2by + c\right)y'_b + y^2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial c} = \left(3ay^2 + 2by + c\right)y'_c + y = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial d} + \frac{\partial f}{\partial d} = \left(3ay^2 + 2by + c\right)y'_d + 1 = 0.$$

Отсюда находим, что $y'_a = -\dfrac{y^3}{\left(3ay^2 + 2by + c\right)}$, $y'_b = -\dfrac{y^2}{\left(3ay^2 + 2by + c\right)}$,

$y'_c = -\dfrac{y}{\left(3ay^2 + 2by + c\right)}$, $y'_d = -\dfrac{1}{\left(3ay^2 + 2by + c\right)}$.

Пусть $y*$ - решение уравнения $a(y*)^3 + b(y*)^2 + cy* + d = 0$.

Тогда $$y'_a(y*,a,b,c,d) = -\frac{(y*)^3}{\left(3a(y*)^2 + 2by* + c\right)},$$

$$y'_b(y*,a,b,c,d) = -\frac{(y*)^2}{\left(3a(y*)^2 + 2by* + c\right)},$$

$$y'_c(y*,a,b,c,d) = -\frac{y*}{\left(3a(y*)^2 + 2by* + c\right)},$$

$$y'_d(y*,a,b,c,d) = -\frac{1}{\left(3a(y*)^2 + 2by* + c\right)}.$$

И линейная оценка погрешности будет

$$|y - y*| \le \frac{\left|(y*)^3\right|\varepsilon_a + \left|(y*)^2\right|\varepsilon_b + |y*|\varepsilon_c + \varepsilon_d}{\left|3a(y*)^2 + 2by* + c\right|}$$