2002/2003 21

1④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-i)$ функцию $f(z)=\dfrac{3z}{z^2-2iz+8}+\dfrac{4i}{z^2+4}$ в кольце, которому принадлежит точка $z=1$.

Шабунин, Сидоров стр. 70 – 75 (примеры 1, 2 стр. 73 – 75), Половинкин стр. 78 – 85 (пример 1 стр. 83 – 84)

① Дроби правильные.

Находим корни уравнения $z^2-2iz+8=0$: $z_{1,2}=i\pm\sqrt{-1-8}$. Получаем два простых корня: $z_1=4i$ и $z_2=-2i$.

Находим корни уравнения $z^2+4=0$. Получаем два простых корня: $z_3=2i$ и $z_4=-2i$.

② Точки $z_1=4i$, $z_{2,4}=-2i$ и $z_3=2i$ являются особыми точками функции $f(z)$ (в них $f(z)$ не регулярна).

③ Разлагаем $f(z)$ на элементарные дроби:

❶ $$\frac{3z}{z^2-2iz+8}=\frac{3z}{(z-4i)(z+2i)}=\frac{A}{z-4i}+\frac{B}{z+2i}=\frac{A(z+2i)+B(z-4i)}{(z-4i)(z+2i)}$$

z^0: $2iA-4iB=0\to A=2B$ ↘ → $A=2$

z^1: $A+B=3$ → $3B=3$ → $B=1$ ↗

❷ $$\frac{4i}{z^2+4}=\frac{4i}{(z-2i)(z+2i)}=\frac{C}{z-2i}+\frac{D}{z+2i}=\frac{C(z+2i)+D(z-2i)}{(z-2i)(z+2i)}$$

z^0: $2iC-2iD=4i\to -4iD=4i$ → $D=-1$ ↘

z^1: $C+D=0$ → $C=-D$ ↗ → $C=1$

$f(z)=\dfrac{2}{z-4i}+\dfrac{1}{z+2i}+\dfrac{1}{z-2i}-\dfrac{1}{z+2i}$, т.е. $\boxed{f(z)=\dfrac{2}{z-4i}+\dfrac{1}{z-2i}}$.

④ Для удобства дальнейших выкладок произведем замену $z-i=w$ или $z=w+i$:

$f(w)=\dfrac{2}{w-3i}+\dfrac{1}{w+3i}+\dfrac{1}{w-i}-\dfrac{1}{w+3i}$, $\quad f(w)=\dfrac{2}{w-3i}+\dfrac{1}{w-i}$

Кольца аналитичности $f(w)$: $|w|<1$,

$1<|w|<3$,

$|w|>3$.

⑤ При $z=1$ получаем $w=1-i$, $|w|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

Т.о., раскладывать дроби в ряд Лорана по степеням w будем в кольце $1<|w|<3$, используя разложения в ряд Тейлора.

При этом $|i|<|w|<|3i|$.

❶ $$\frac{2}{w-3i}=\frac{2}{-3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{w}{3i}}=\frac{2}{-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{3i}\right)^n=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w)^n}{(3i)^{n+1}}.$$

❷ $$\frac{1}{w-i}=\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{1-\frac{i}{w}}=\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{w}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{(w)^{n+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(i)^{k-1}}{(w)^k}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{w^n}{(i)^{n+1}}$$

Ответ: в кольце, которому принадлежит точка $z=1$ $(1<|z-i|<3)$ $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)(z-i)^n}{(3i)^{n+1}}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-i)^n}{(i)^{n+1}}$