1. Найти области сходимости методов простой итерации, Якоби и Зейделя для систем с матрицами вида $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

МПИ: $\det(B-\lambda E)=\det((E-A)-\lambda E)=((1-\alpha)-\lambda)^3-\beta((1-\alpha)-\lambda)=0$, $\lambda_{1,2}=1-\alpha$, $\lambda_3=1-\alpha-\beta$. Сходится при $|\lambda_i|<1$

Метод Якоби: $\det(B-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} \alpha\lambda & 0 & \beta \\ 0 & \alpha\lambda & 0 \\ \beta & 0 & \alpha\lambda \end{pmatrix}=\alpha\lambda(\alpha^2\lambda^2-\beta^2)$=0, $\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}=\pm\dfrac{\beta}{\alpha}$ ⇨ сходится при $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|<1$.

Метод Зейделя: $\det(B-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} \alpha\lambda & 0 & \beta \\ 0 & \alpha\lambda & 0 \\ \beta\lambda & 0 & \alpha\lambda \end{pmatrix}=\alpha\lambda^2(\alpha^2\lambda-\beta^2)$=0, $\lambda_{1,2}=0$, $\lambda_3=\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ ⇨ сходится при $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|<1$

2. При каких значениях параметра τ метод $\vec{x}_{n+1}=(E-\tau A)\vec{x}_n+\tau\vec{b}$ сходится с произвольно начатого начального приближения для системы линейных уравнений $A\vec{x}=\vec{b}$ с матрицей $A=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

$\det(B-\lambda E)=\det((E-\tau A)-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} 1-2\tau-\lambda & -8\tau \\ -2\tau & 1-9\tau-\lambda \end{pmatrix}=(\lambda-(1-\tau))(\lambda-(1-11\tau))$=0, $0<\tau<\dfrac{2}{11}$.

3. Найти области сходимости методов простой итерации, Якоби и Зейделя для систем с матрицами вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

МПИ: $\det(B-\lambda E)=\det((E-A)-\lambda E)=((1-\alpha)-\lambda)^3-2\beta^2((1-\alpha)-\lambda)=0$, $\lambda_1=1-\alpha$, $\lambda_{2,3}=1-\alpha\pm\sqrt{2}\beta$. Сходится при $|\lambda_i|<1$

Метод Якоби: $\det(B-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} \alpha\lambda & \beta & 0 \\ \beta & \alpha\lambda & \beta \\ 0 & \beta & \alpha\lambda \end{pmatrix}=\alpha\lambda(\alpha^2\lambda^2-2\beta^2)$=0, $\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{2}\dfrac{\beta}{\alpha}$ ⇨ сходится при $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Метод Зейделя: $\det(B-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} \alpha\lambda & \beta & 0 \\ \beta\lambda & \alpha\lambda & \beta \\ 0 & \beta\lambda & \alpha\lambda \end{pmatrix}=\alpha\lambda^2(\alpha^2\lambda-2\beta^2)$=0, $\lambda_{1,2}=0$, $\lambda_3=2\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ ⇨ сходится при $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

4. Для решения системы $\vec{x} = B\vec{x} + \vec{c}$ рассмотрим алгоритм с некоторым начальным приближением $\vec{x}^0$: $\vec{z}^{k+1} = B\vec{x}^k + \vec{c}$, $\vec{x}^{k+1} = \alpha\vec{x}^k + (1-\alpha)\vec{z}^{k+1}$. Пусть $\lambda(B) \in [m, M]$, m>1. Найти оптимальное значение итерационного параметра α.

$$\vec{x}^{k+1} = (\alpha E + (1-\alpha)B)\vec{x}^k + (1-\alpha)\vec{c}, \ \min_\alpha \varphi(\alpha) = \min_\alpha \max_\lambda |\alpha + (1-\alpha)\lambda|, \ \alpha = \frac{m+M}{m+M-2}$$

5. Доказать, что для систем линейных уравнений второго порядка (n = 2) методы Якоби и Гаусса-Зейделя сходятся и расходятся одновременно.

Искомый результат следует из явного представления операторов перехода $B_{Я} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \ \lambda_{1,2}^{Я} = \pm\sqrt{\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}}; \ B_З = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{pmatrix} \Rightarrow \ \lambda_1 = 0, \ \lambda_2^З = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}.$$