2016/2017 1_в1

1② Решить уравнение $3\operatorname{ch} z \operatorname{sh} z + 4i \operatorname{sh} z - 3i \operatorname{ch} z + 4 = 0$, проверив, что его левая часть делится на $(\operatorname{sh} z - i)$.

📖 ✍ Половинкин §4, §5 пример 3.

① $\underline{3\operatorname{ch} z \operatorname{sh} z} + 4i \operatorname{sh} z - \underline{3i \operatorname{ch} z} + 4 = 0 \quad \to \quad 3\operatorname{ch} z(\operatorname{sh} z - i) + 4i(\operatorname{sh} z - i) = 0 \quad \to \quad (3\operatorname{ch} z + 4i)(\operatorname{sh} z - i) = 0 \quad \to$

$$\left[\begin{array}{l} 3\operatorname{ch} z + 4i = 0, \\ \operatorname{sh} z - i = 0. \end{array}\right.$$

② $3\operatorname{ch} z + 4i = 0 \to \operatorname{ch} z = -\dfrac{4i}{3}$.

$\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, т.о. $\dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = -\dfrac{4i}{3} \to e^z + e^{-z} = -\dfrac{8i}{3}$.

Сделаем замену $w = e^z$: $w + \dfrac{1}{w} = -\dfrac{8i}{3}$ или $w^2 + \dfrac{8i}{3}w + 1 = 0$.\

Решаем полученное квадратное относительно w уравнение: $w_{1,2} = \dfrac{-\frac{8i}{3} \pm \sqrt{-\frac{64}{9} - 4\cdot 1}}{2} = \dfrac{-\frac{8i}{3} \pm \sqrt{-\frac{64+36}{9}}}{2} =$

$= \dfrac{-\frac{8i}{3} \pm i\sqrt{\frac{100}{9}}}{2} = \dfrac{-\frac{8i}{3} \pm i\frac{10}{3}}{2} = -\dfrac{4i}{3} \pm i\dfrac{5}{3} = \left[\begin{array}{l} \frac{i}{3}, \\ -3i. \end{array}\right.$

а) $w_1 = \dfrac{i}{3}$, т.е. $e^z = \dfrac{i}{3}$.

Решаем "в лоб" ☹

$z = x + iy \to e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, т.о. $e^x \cos y + ie^x \sin y = \dfrac{i}{3}$.

Приравнивая вещественные и мнимые части слева и справа, получим $\begin{cases} e^x \cos y = 0, \\ e^x \sin y = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Т.к. $e^x \neq 0$, то из $e^x \cos y = 0$ следует, что $\cos y = 0$, и $y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

❶При $k = 2n$ второе уравнение системы принимает вид $e^x = \dfrac{1}{3}$, и $x = \ln\dfrac{1}{3} = -\ln 3$.

Получаем $\underline{z = -\ln 3 + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

❷При $k = 2n+1$ второе уравнение системы принимает вид $e^x = -\dfrac{1}{3}$, и в этом случае решений нет.

б) $w_2 = -i3$, т.е. $e^z = -i3$.

Решаем, используя многозначную функцию $\operatorname{Ln} z$ ☺

$z = \operatorname{Ln}(-i3) = \ln|-i3| + i(\arg(-i3) + 2\pi n) = \ln 3 + i\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, т.о. $\underline{z = \ln 3 + i\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)}$, $n \in \mathbb{Z}$.

③ $\operatorname{sh} z - i = 0 \to \operatorname{sh} z = i$.

$\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, т.о. $\dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = i \to e^z - e^{-z} = 2i$.

Сделаем замену $w = e^z$: $w - \dfrac{1}{w} = 2i$ или $w^2 - i2w + 1 = 0$.

Решаем полученное квадратное относительно w уравнение: $w_{1,2} = i$.

Таким образом, $e^z = i$.

Решаем, используя многозначную функцию $\operatorname{Ln} z$ ☺ (можно и "в лоб")

$z = \operatorname{Ln}(i) = \ln|i| + i(\arg(i) + 2\pi m) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)$, т.о. $\underline{z = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),}$ $m \in \mathbb{Z}$.

ОТВЕТ: $z = -\ln 3 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$,

$$z = \ln 3 + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z},$$

$$z = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ m \in \mathbb{Z}.$$