2⑦ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + 5u - 5tx - 5t + 9\pi e^{-t}\sin 2x,\ \left(t > 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\right);\quad u\big|_{t=0} = 0,\ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$$

$$u_t\big|_{t=0} = 1 + x,\ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{3}\right);\quad u\big|_{x=0} = t,\ (t \ge 0);\quad u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = t,\ (t \ge 0).$$

Уроев стр. 79 – 92 (пример 1 стр. 87 – 88, пример 2 стр. 88 - 90)
Тихонов, Самарский со стр. 108
Кошляков со стр. 159

① Замена, **приводящая к однородным ГУ**:

$$\boxed{u = v + (x+1)t}. \qquad (1)$$

$$u_{tt} = v_{tt},\qquad u_{xx} = v_{xx};\qquad u\big|_{t=0} = v\big|_{t=0},\qquad u_t\big|_{t=0} = v_t\big|_{t=0} + (x+1)$$

$$u\big|_{x=0} = v\big|_{x=0} + t,\quad u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = v_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} + t$$

$$v_{tt} = v_{xx} + 5v + 5(x+1)t - 5tx - 5t + 9\pi e^{-t}\sin 2x$$

② $v(x,t)$ - решение смешанной задачи

$$v_{tt} = v_{xx} + 5v + 9\pi e^{-t}\sin 2x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0; \qquad (2)\ (ДУ)$$

$$v\big|_{t=0} = 0,\ v_t\big|_{t=0} = 0,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; \qquad (3)\ (НУ)$$

$$v\big|_{x=0} = 0,\ v_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,\ t \ge 0. \qquad (4)\ (ГУ)$$

③ Решение СЗ (2) – (4) $v(x,t)$ будем искать в виде функционального ряда с разделенными переменными *x* и *t*:

$$v(x,t) \sim \sum_k T_k(t) X_k(x). \qquad (5)$$

От функций $X_k(x)$ потребуем[1], чтобы они являлись собственными функциями для дифференциального оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ и удовлетворяли однородным смешанным граничным условиям [2]:

$$X_k''(x) = -\lambda^2 X_k(x),$$

$$X_k(0) = X_k'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\ ^3.$$

$\underline{\underline{\lambda = 0}}$ $X_0 = C_1 x + C_2$. Из ГУ $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow$ с.ф. нет

$\underline{\underline{\lambda \ne 0}}$ $X_k = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x$,

$$X_k(0) = 0 \to C_1 = 0 \text{ и } X_k = C_2\sin\lambda x,\ X_k' = \lambda C_2\cos\lambda x$$

$$X_k'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ и } C_2 \ne 0 \to \cos\frac{\lambda\pi}{2} = 0 \to \frac{\lambda\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l \to \lambda = 1 + 2l,\ l \in \mathrm{N}.$$

Т.о., находим

$\lambda_k^{\,2} = (1+2k)^2$ - собственные значения оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$,

$X_k = \sin(1+2k)x$ - собственные функции, удовлетворяющие однородным смешанным ГУ.

---

[1] Вспомогательная задача (для однородного уравнения) согласно МРП: $T''X = TX'' + TX$, т.е. $\frac{T'' - 5T}{T} = \frac{X''}{X} = \mu$. По свойствам оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ (Уроев стр. 145 замечание 4) постоянная разделения $\mu = -\lambda^2$.

[2] Тогда $v(x,t)$ автоматически будет удовлетворять (4)

[3] Задача Штурма-Лиувилля.

$k \in \{0\} \cup \mathrm{N}$.

④ Далее, разложим функцию $\sin 2x$, входящую в правую часть ДУ (2) по системе $\{\sin(1+2k)x\}_{k=0}^{\infty}$:

$$\sin 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin(1+2k)x,$$

$$\boxed{\alpha_k =} \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \sin(1+2k)x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos(2k-1)x - \cos(2k+3)x\right]dx = \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left.\frac{\sin(2k+31)x}{(2k+3)}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} - \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)}\right] = \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi}\left[\frac{(2k+3)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+3)}\right] \boxed{= \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)(2k+3)}},\ k \in \mathrm{N}.$$

⑤ Формально подставляем ряд (5) в ДУ (2) и НУ (3):

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k''(x) + 5\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) + 9\pi e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k X_k(x),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = 0, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0) X_k(x) = 0 \ .$$

⑥ Потребуем почленного выполнения написанных равенств:

$$\begin{cases} T_k''(t) = \left[5 - (1+2k)^2\right] T_k(t) + 9\pi e^{-t}\alpha_k, \\ T_k(0) = 0, \qquad T_k'(0) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Замечая, что коэффициент при T_k меняет знак в зависимости от *k*, отдельно рассмотрим следующие задачи:

$$\begin{cases} T_0''(t) = 4T_k(t) + 9\pi e^{-t}\dfrac{8}{3\pi}, \\ T_0(0) = 0, \qquad T_0'(0) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

и при $k \geq 1$

$$\begin{cases} T_k''(t) = -\left[(1+2k)^2 - 5\right] T_k(t) + 9\pi e^{-t}\alpha_k, \\ T_k(0) = 0, \qquad T_k'(0) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

⑦ Решаем задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (7):

$T_0 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + T_{0_ч}$,

частное решение ищем в виде: $T_{0_ч} = Ae^{-t}$.

$$A = 4A + 24 \rightarrow A = -8 \text{ и } T_{0_ч} = -8e^{-t}.$$

Из НУ для (6): $\begin{cases} C_1 + C_2 - 8 = 0 \\ 2C_1 - 2C_2 + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ C_1 - C_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 6 \end{cases}$

$\boxed{T_0 = 2e^{2t} + 6e^{-2t} - 8e^{-t}}$

⑧ Решаем задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (8):

$$T_k = C_1 \cos\sqrt{(1+2k)^2 - 5}t + C_2 \sin\sqrt{(1+2k)^2 - 5}t + T_{k_ч}$$

частное решение ищем в виде: $T_{k_ч} = Ae^{-t}$.

$$A = -\left[(1+2k)^2 - 5\right]A + 9\pi e^{-t}\alpha_k \quad \rightarrow \quad A = \frac{9\pi\alpha_k}{\left[(1+2k)^2 - 5\right] + 1} \quad \text{и}$$

$$T_{k_ч} = \frac{9\pi\alpha_k}{\left[(1+2k)^2 - 5\right] + 1} e^{-t}.$$

$$T_k = C_1 \cos\sqrt{(1+2k)^2 - 5}t + C_2 \sin\sqrt{(1+2k)^2 - 5}t + \frac{9\pi\alpha_k}{\left[(1+2k)^2 - 5\right] + 1} e^{-t}$$

Из НУ для (7): $\begin{cases} C_1 + \dfrac{9\pi\alpha_k}{\left[(1+2k)^2-5\right]+1} = 0 \\ C_2\sqrt{(1+2k)^2-5} - \dfrac{9\pi\alpha_k}{\left[(1+2k)^2-5\right]+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{9\pi\alpha_k}{\left[(1+2k)^2-5\right]+1} \\ C_2 = \dfrac{9\pi\alpha_k}{\left(\left[(1+2k)^2-5\right]+1\right)\sqrt{(1+2k)^2-5}} \end{cases}$

$$\boxed{T_k = \frac{9\pi\alpha_k}{\left[(1+2k)^2-5\right]+1}\left[-\cos\sqrt{(1+2k)^2-5}\,t + \frac{1}{\sqrt{(1+2k)^2-5}}\sin\sqrt{(1+2k)^2-5}\,t + e^{-t}\right]}$$

⑨ В итоге получаем ряд:

$$v(x,t) \sim \left(2e^{2t} + 6e^{-2t} - 8e^{-t}\right)\sin x +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9\pi\alpha_k}{\left[(1+2k)^2-5\right]+1}\left[-\cos\sqrt{(1+2k)^2-5}\,t + \frac{1}{\sqrt{(1+2k)^2-5}}\sin\sqrt{(1+2k)^2-5}\,t + e^{-t}\right]\sin(1+2k)x$$

Остается отметить, что ряды $\sum\limits_k T_k(t)X_k(x)$, $\sum\limits_k T_k''(t)X_k(x)$ и $\sum\limits_k T_k(t)X_k''(x)$ сходятся равномерно на множестве $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\times[0;\infty)$, так как мажорируются сходящимся рядом $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{const}{k^2}$. Следовательно, можно записать

Ответ: $$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= (x+1)t + \left(2e^{2t} + 6e^{-2t} - 8e^{-t}\right)\sin x + \\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{72(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+3)\left[(1+2k)^2-4\right]}\left[\begin{aligned} &e^{-t} - \cos\sqrt{(1+2k)^2-5}\,t + \\ &\frac{1}{\sqrt{(1+2k)^2-5}}\sin\sqrt{(1+2k)^2-5}\,t \end{aligned}\right]\sin(1+2k)x \end{aligned}}$$