2001/2002 21

2④
$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + x\sin t, \ t>0, \ x>0 \\ u\big|_{t=0} = 2x^2, \quad u_t\big|_{t=0} = 8 - x, \quad x \ge 0, \\ u_x\big|_{x=0} = \sin^2 t - \sin t, \ t \ge 0 \end{cases}$$

📖 Уроев стр. 70 – 75 (пример 1 стр. 73 – 75)

① Прежде всего, перейдем к **однородному** волновому уравнению.

Т.к. $\sin t$ - собственная функция оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$,

а x – с.ф. оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$,

то частное решение[1] будем искать в виде:

$$u_ч = Ax\sin t \qquad u_{ч\,t} = Ax\cos t \qquad u_{ч\,x} = A\sin t$$
$$u_{ч\,tt} = -Ax\sin t \qquad u_{ч\,xx} = 0$$

$$-Ax\sin t = 4\cdot 0 + x\sin t \Rightarrow A = -1 \Rightarrow$$

$$\boxed{u_ч = -x\sin t} \tag{1}$$

② Поставим смешанную задачу для однородного уравнения.

Т.к. $u_ч\big|_{t=0} = 0$, $u_{ч\,t}\big|_{t=0} = -x$, $u_{ч\,x}\big|_{x=0} = -\sin t$ и $u = u_ч + v$ (где введено обозначение $u_{од} \equiv v$ для краткости записи), т.е. $v = u - u_ч$, то

$$\begin{cases} v_{tt} = 4v_{xx}, & t>0, & x>0, \\ v\big|_{t=0} = 2x^2, & v_t\big|_{t=0} = 8, & x \ge 0, \\ v_x\big|_{x=0} = \sin^2 t, & & t \ge 0. \end{cases} \tag{2}$$

③ Уравнения характеристик:

$(dx)^2 = 4(dt)^2$

характеристики: $x \pm 2t = C$

общий вид решения: $v_i = \varphi_i(x+2t) + \psi_i(x-2t)$, $i = \mathrm{I}, \mathrm{II}$

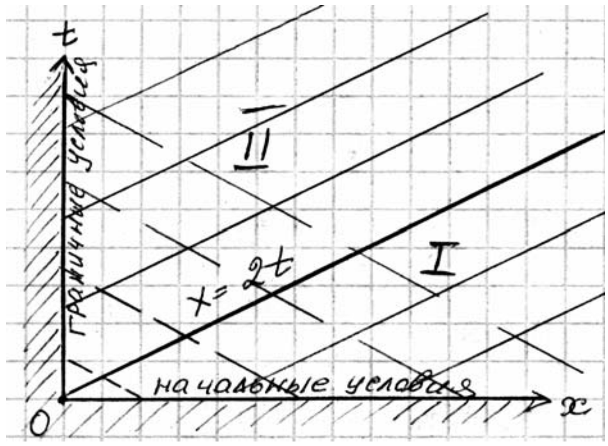
условие непрерывности решения на характеристике $x = 2t$:

$\varphi_\mathrm{I}(4t) + \psi_\mathrm{I}(0) = \varphi_\mathrm{II}(4t) + \psi_\mathrm{II}(0)$

Т.о., обратная волна $\varphi_\mathrm{II}(x+2t)$ с точностью до постоянной совпадает с обратной волной $\varphi_\mathrm{I}(x+2t)$.

Если положить $\varphi_\mathrm{II}(x+2t) = \varphi_\mathrm{I}(x+2t)$, то условие непрерывности на характеристике $x = 2t$ принимает вид:

$$\boxed{\psi_\mathrm{I}(0) = \psi_\mathrm{II}(0)} \tag{3}$$



④ В области I $(x \ge 2t > 0)$[2] для определения φ_I и ψ_I достаточно НУ[3] [4]

$$v_\mathrm{I}(x,0) = \varphi_\mathrm{I}(x) + \psi_\mathrm{I}(x) = 2x^2 \tag{4}$$
$$v_{\mathrm{I}_t}(x,0) = 2\varphi'_\mathrm{I}(x) - 2\psi'_\mathrm{I}(x) = 8 \tag{5}$$

---

[1] Частное решение $u_ч$ неоднородного уравнения можно найти из формулы Дюамеля (Уроев стр. 62)

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\lambda,\tau)\,d\lambda\,d\tau + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(x-at)\right]$$

[2] в точках (x,t), лежащих ниже характеристики $x = 2t$.

[3] Начальные условия.

[4] Можно сразу воспользоваться формулой Даламбера (Уроев стр. 41) $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\lambda)\,d\lambda$

$\frac{d}{dx}$(4): $\quad \varphi_{\mathrm{I}}'(x)+\psi_{\mathrm{I}}'(x)=4x$ (6)

(5)/2+(6): $\quad 2\varphi_{\mathrm{I}}'(x)=4+4x \to \varphi_{\mathrm{I}}'(x)=2x+2 \to \boxed{\varphi_{\mathrm{I}}(x)=x^2+2x+C}$

из (4): $\quad \boxed{\psi_{\mathrm{I}}(x)=2x^2-\varphi_{\mathrm{I}}(x)=x^2-2x-C}$

$$v_{\mathrm{I}}(x,t)=(x+2t)^2+2(x+2t)+C+(x-2t)^2+2(x-2t)-C$$

$\boxed{u_{\mathrm{I}}(x,t)=(x+2t)^2+2(x+2t)+(x-2t)^2+2(x-2t)-x\sin t}$ при $x\geq 2t>0$ (7)

⑤ В области II $(0<x\leq 2t)$[5] для определения φ_{II} и ψ_{II} есть два условия:

❶ условие непрерывности на характеристике $x=2t$ при $\varphi_{\mathrm{II}}(x+2t)=\varphi_{\mathrm{I}}(x+2t)$, принимающее вид:

$\psi_{\mathrm{I}}(0)=\psi_{\mathrm{II}}(0)$ (3)

❷ граничное условие:

$v_{\mathrm{II}\,x}\big|_{x=0}=\varphi_{\mathrm{II}}'(2t)+\psi_{\mathrm{II}}'(-2t)=\sin^2 t$ (8)

из (3): $\quad \psi_{\mathrm{II}}(0)=-C$

Т.к. φ_i и ψ_i, $i=\mathrm{I},\mathrm{II}$, определяются с точностью до произвольных постоянных, совпадающих по абсолютной величине и имеющих разные знаки, то можно положить $C=0$, т.о.:

$\boxed{\psi_{\mathrm{II}}(0)=0}$ (9)

Тогда $\boxed{\varphi_{\mathrm{II}}(x)=x^2+2x}$, $\varphi_{\mathrm{II}}'(x)=2x+2$.

Производя в (8) замену $\tau=-2t$, получаем:

$$\psi_{\mathrm{II}}'(\tau)=-\varphi_{\mathrm{II}}'(-\tau)+\frac{1-\cos\left(2\left(-\frac{\tau}{2}\right)\right)}{2}=-(2(-\tau)+2)+\frac{1-\cos(\tau)}{2}=2\tau-\frac{3}{2}-\frac{\cos\tau}{2}$$

Интегрируя последнее выражение, получаем

$$\psi_{\mathrm{II}}(\tau)==\tau^2-\frac{3}{2}\tau-\frac{\sin\tau}{2}+C_1.$$

С учетом (9):

$$\boxed{\psi_{\mathrm{II}}(x)==x^2-\frac{3}{2}x-\frac{\sin x}{2}}.$$

$$v_{\mathrm{II}}(x,t)=(x+2t)^2+2(x+2t)+(x-2t)^2-\frac{3}{2}(x-2t)-\frac{\sin(x-2t)}{2}$$

$\boxed{u_{\mathrm{II}}(x,t)=(x+2t)^2+2(x+2t)+(x-2t)^2-\frac{3}{2}(x-2t)-\frac{\sin(x-2t)}{2}-x\sin t}$ при $0<x\leq 2t$

Ответ: $$\boxed{u(x,t)=-x\sin t+(x+2t)^2+2(x+2t)+\begin{cases}(x-2t)^2-2(x-2t) & \text{\textit{при} } x\geq 2t>0\\ (x-2t)^2-\frac{3}{2}(x-2t)-\frac{\sin(x-2t)}{2} & \text{\textit{при} } x\leq 2t<0\end{cases}}$$

---

[5] в точках (x,t), лежащих выше характеристики $x=2t$.