2007/2008 83

1⑤ Решить смешанную задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} - 6t - 6\,,\ \ x>0,\ t>0\,,$$
$$u\big|_{t=0} = 2x^3\,,\ u_t\big|_{t=0} = 0\,,\ x \ge 0\,,$$
$$(u+u_x)\big|_{x=0} = (t-1)\sin t + t\cos t\,,\ t \ge 0\,.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x>0,\ t>0)$. Ответ обосновать.

📖 ✍ Уроев стр. 70 – 75 (пример 1 стр. 73 – 75)

① Прежде всего, перейдем к **однородному** волновому уравнению.

Частное решение[1] будем искать, например, в виде:

$$u_ч = f(t),\ u_{ч\,t} = f'(t),\ u_{ч\,x} = 0,\ u_{ч\,tt} = f''(t),\ u_{ч\,xx} = 0\,.$$

$$f''(t) = -6t - 6 \Rightarrow f'(t) = -3t^2 - 6t + c_1 \Rightarrow f(t) = -t^3 - 3t^2 + c_1 t + c_2\,.$$

Полагая $c_1 = c_2 = 0$, получаем

$$\boxed{u_ч = -t^3 - 3t^2} \qquad (1)$$

② Поставим смешанную задачу для однородного уравнения.

Т.к. $u_ч\big|_{t=0} = 0$, $u_{ч\,t}\big|_{t=0} = 0$, $u_{ч\,x}\big|_{x=0} = 0$ и $u = u_ч + v$ (где введено обозначение $u_{од} \equiv v$ для краткости записи), т.е.

$$v = u - u_ч\text{, то}$$

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}\,, & t>0, \quad x>0,\\ v\big|_{t=0} = 2x^3, & v_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \ge 0,\\ (v+v_x)\big|_{x=0} = (t-1)\sin t + t\cos t + t^3 + 3t^2\,, & t \ge 0. \end{cases} \qquad (2)$$

③ Уравнения характеристик:

$$(dx)^2 = (dt)^2$$

характеристики: $x \pm t = C$

общий вид решения: $v_i = \varphi_i(x+t) + \psi_i(x-t),\ i = \mathrm{I}, \mathrm{II}$

условие непрерывности решения на характеристике $x=t$: $\varphi_{\mathrm{I}}(2t) + \psi_{\mathrm{I}}(0) = \varphi_{\mathrm{II}}(2t) + \psi_{\mathrm{II}}(0)$

Т.о., обратная волна $\varphi_{\mathrm{II}}(x+t)$ с точностью до постоянной совпадает с обратной волной $\varphi_{\mathrm{I}}(x+t)$.

Если положить $\varphi_{\mathrm{II}}(x+t) = \varphi_{\mathrm{I}}(x+t)$, то условие непрерывности на характеристике $x=t$ принимает вид:

$$\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0) \qquad (3)$$

④ В области I $(x \ge t > 0)$[2] для определения φ_{I} и ψ_{I} достаточно НУ[3].

Для этого можно сразу воспользоваться формулой Даламбера (Уроев стр. 41)

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\lambda)\,d\lambda}:$$

$$v_{\mathrm{I}}(x,t) = \frac{1}{2}\left[2(x+t)^3 + 2(x-t)^3\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 0\,d\lambda = (x+t)^3 + (x-t)^3\text{[4]}.$$

---

[1] Частное решение $u_ч$ неоднородного уравнения можно найти из формулы Дюамеля (Уроев стр. 62)

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\lambda,\tau)\,d\lambda\, d\tau + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(x-at)\right]$$

[2] в точках (x,t), лежащих ниже характеристики $x=t$.

[3] Начальные условия.

[4] Тот же результат можно получить и с помощью метода характеристик:

$$v_{\mathrm{I}}(x,0) = \varphi_{\mathrm{I}}(x) + \psi_{\mathrm{I}}(x) = 2x^3 \qquad (4)$$

$$v_{\mathrm{I}_t}(x,0) = \varphi_{\mathrm{I}}'(x) - \psi_{\mathrm{I}}'(x) = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{d}{dx}(4):\ \ \varphi_{\mathrm{I}}'(x) + \psi_{\mathrm{I}}'(x) = 6x^2 \qquad (6)$$

(5) +(6): $\quad 2\varphi_{\mathrm{I}}'(x) = 6x^2 \to \varphi_{\mathrm{I}}'(x) = 3x^2 \to \boxed{\varphi_{\mathrm{I}}(x) = x^3 + C}$

Заметим, что здесь $\varphi_{\mathrm{I}}(x+t)=(x+t)^3+C$, $\psi_{\mathrm{I}}(x-t)=(x-t)^3-C$. Не нарушая общности решения, постоянную C можно положить равной нулю. Т.о., получаем $\boxed{\varphi_{\mathrm{I}}(x+t)=(x+t)^3}$, $\boxed{\psi_{\mathrm{I}}(x-t)=(x-t)^3}$

$\boxed{u_{\mathrm{I}}(x,t)=-t^3-3t^2+(x+t)^3+(x-t)^3}$[5] при $x\ge t>0$ (7)

⑤ В области II $(0<x\le t)$[6] для определения φ_{II} и ψ_{II} есть два условия:

❶ условие непрерывности на характеристике $x=t$ при $\varphi_{\mathrm{II}}(x+t)=\varphi_{\mathrm{I}}(x+t)$, принимающее вид:

$$\psi_{\mathrm{I}}(0)=\psi_{\mathrm{II}}(0) \tag{3}$$

❷ граничное условие:

$$\left.\left(v_{\mathrm{II}}+v_{\mathrm{II}x}\right)\right|_{x=0}=\varphi_{\mathrm{II}}(t)+\psi_{\mathrm{II}}(-t)+\varphi'_{\mathrm{II}}(t)+\psi'_{\mathrm{II}}(-t)=(t-1)\sin t+t\cos t+t^3+3t^2 \tag{8}$$

из (3): $\boxed{\psi_{\mathrm{II}}(0)=0}$ (9)

Тогда $\boxed{\varphi_{\mathrm{II}}(t)=t^3}$, $\varphi'_{\mathrm{II}}(x)=3t^2$.

Производя в (8) замену $\tau=-t$, получаем:

$$\psi'_{\mathrm{II}}(\tau)+\psi_{\mathrm{II}}(\tau)=(\tau+1)\sin\tau-\tau\cos\tau-\tau^3+3\tau^2-\varphi_{\mathrm{II}}(-\tau)-\varphi'_{\mathrm{II}}(-\tau)=$$
$$=(\tau+1)\sin\tau-\tau\cos\tau-\tau^3+3\tau^2-(-\tau)^3-3(-\tau)^2=(\tau+1)\sin\tau-\tau\cos\tau,$$

т.е. $\psi'_{\mathrm{II}}(\tau)+\psi_{\mathrm{II}}(\tau)=(\tau+1)\sin\tau-\tau\cos\tau$

Интегрируя последнее выражение, получаем

$\psi_{\mathrm{II}}(\tau)=C_1e^{-\tau}+\psi_{II_ч}$, где $\psi_{II_ч}=\sin\tau-\tau\cos\tau$[7] (частное решение ищем в виде: $\psi_{II_ч}=(a\tau+\beta)\sin\tau+(\gamma\tau+\delta)\cos\tau$,

подставляя в ДУ для ψ_{II}, получаем:

$$\begin{bmatrix}\alpha\sin\tau+(a\tau+\beta)\cos\tau+\gamma\cos\tau-(\gamma\tau+\delta)\sin\tau+\\ +(a\tau+\beta)\sin\tau+(\gamma\tau+\delta)\cos\tau\end{bmatrix}=(\tau+1)\sin\tau-\tau\cos\tau;\ \begin{cases}\alpha+\beta-\delta=1\\ \alpha-\gamma=1\\ \alpha+\gamma=-1\\ \beta+\gamma+\delta=0\end{cases},$$

$$\text{т.е.}\ \begin{cases}\beta-\delta=1\\ \alpha=0\\ \gamma=-1\\ \beta+\delta=1\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\\ \gamma=-1\\ \delta=0\end{cases}.)$$

С учетом (9)[8] $C_1=0$ и $\boxed{\psi_{\mathrm{II}}(\tau)=\sin\tau-\tau\cos\tau}$.

$v_{\mathrm{II}}(x,t)=(x+t)^3+\sin(x-t)-(x-t)\cos(x-t)$.

$\boxed{u_{\mathrm{II}}(x,t)=-t^3-3t^2+(x+t)^3+\sin(x-t)-(x-t)\cos(x-t)}$ при $0<x\le t$.

⑥ Проверим, что решение принадлежит классу $C^2(x>0,\ t>0)$.

Т.к. частное решение $u_ч=-t^3-3t^2$ и волна, бегущая назад $\varphi(x+t)=(x+t)^3$ одинаковы в обеих областях $x\ge t>0$ и $x\le t<0$ и принадлежат $C^2(x>0,\ t>0)$, волна бегущая вперед $\psi_{\mathrm{I}}(x-t)=(x-t)^3\in C^2(x>0,\ t>0)$ при $x\ge t>0$ и $\psi_{\mathrm{II}}(x-t)=\sin(x-t)-(x-t)\cos(x-t)\in C^2(x>0,\ t>0)$ при $0<x\le t$, то надо проверить равенство первых и вторых частных производных для волны бегущей вперед на характеристике $x=t$.

$\psi_{\mathrm{I}}(0)=0=\psi_{\mathrm{II}}(0)$ - условие сшивки.

$$\left.\left(\psi_{\mathrm{I}}(x-t)\right)'_x\right|_{x=t}=\left.3(x-t)^2\right|_{x=t}=0=\left[\cos(x-t)-\cos(x-t)+(x-t)\sin(x-t)\right]_{x=t}=$$
$$=\left[(x-t)\sin(x-t)\right]_{x=t}=\left.\left(\psi_{\mathrm{II}}(x-t)\right)'_x\right|_{x=t},$$

из (4): $\boxed{\psi_{\mathrm{I}}(x)=2x^3-\varphi_{\mathrm{I}}(x)=x^3-C}$

$v_{\mathrm{I}}(x,t)=(x+t)^3+C+(x-t)^3-C$

[5] Найдено решение при $x>at\ge 0$: 1 очко.

[6] в точках (x,t), лежащих выше характеристики $x=3t$.

[7] Найдено решение при $0\le x<at$: 2 очко.

[8] Учтено необходимое условие на разделяющей характеристике: 1 очко.

$$\left(\psi_{\mathrm{I}}(x-t)\right)'_t\Big|_{x=t} = -3(x-t)^2\Big|_{x=t} = 0 = \left[-\cos(x-t)+\cos(x-t)-(x-t)\sin(x-t)\right]_{x=t} =$$

$$= \left[-(x-t)\sin(x-t)\right]_{x=t} = \left(\psi_{\mathrm{II}}(x-t)\right)'_t\Big|_{x=t},$$

$$\left(\psi_{\mathrm{I}}(x-t)\right)''_{xx}\Big|_{x=t} = 6(x-t)\big|_{x=t} = 0 = \left[\sin(x-t)-(x-t)\cos(x-t)\right]_{x=t} = \left(\psi_{\mathrm{II}}(x-t)\right)''_{xx}\Big|_{x=t},$$

$$\left(\psi_{\mathrm{I}}(x-t)\right)''_{xt}\Big|_{x=t} = -6(x-t)\big|_{x=t} = 0 = -\left[\sin(x-t)+(x-t)\cos(x-t)\right]_{x=t} = \left(\psi_{\mathrm{II}}(x-t)\right)''_{xt}\Big|_{x=t},$$

$$\left(\psi_{\mathrm{I}}(x-t)\right)''_{tt}\Big|_{x=t} = 6(x-t)\big|_{x=t} = 0 = \left[\sin(x-t)+(x-t)\cos(x-t)\right]_{x=t} = \left(\psi_{\mathrm{II}}(x-t)\right)''_{tt}\Big|_{x=t}$$ [9].

Ответ: $$\boxed{u(x,t) = -t^3 - 3t^2 + (x+t)^3 + \begin{cases}(x-t)^3, & при\ \ x \ge t > 0,\\ \sin(x-t)-(x-t)\cos(x-t), & при\ \ x \le t < 0.\end{cases}}$$

[9] Проверена непрерывность вторых производных: 1.