Найдите все собственные числа λ_k и соответствующие собственные функции ω_k оператора $\Lambda_{\bar{x}x}$ (или же представьте их вид и докажите, что они – собственные числа и функции оператора $\Lambda_{\bar{x}x}$)

$\Lambda_{\bar{x}x}\omega_k = \lambda_k\omega_k$, $\quad \Lambda_{\bar{x}x}u = h^{-2}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}), \quad n = 0,1,...,N, \quad u_0 = u_N = 1, \quad Nh = 1.$

Представьте решение разностного уравнения $\Lambda_{\bar{x}x}u = f, \quad u_0 = u_N = 1$ в виде конечного ряда Фурье.

Определите параметр обусловленности СЛАУ.

Пользуясь линейностью, представим решение задачи

$$\Lambda_{\bar{x}x}u = f, \quad u_0 = u_N = 1 \tag{1}$$

в виде $u = 1 + v$, где v решение задачи

$$\Lambda_{\bar{x}x}v = f, \quad v_0 = v_N = 0. \tag{2}$$

Запишем условия задачи вспомогательной задачи для ω в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_{n-1} - 2\omega_n + \omega_{n+1}}{h^2} = \lambda\omega_n, \quad n = 0,1,...,N, \\ \omega_0 = \omega_N = 0, \quad Nh = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Или

$$\begin{cases} \omega_{n+1} - \left(2 + \lambda h^2\right)\omega_n + \omega_{n-1} = 0, \quad n = 0,1,...,N, \\ \omega_0 = \omega_N = 0, \quad Nh = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Соответствующее характеристическое уравнение (решение ищем в виде $\omega_n = q^n$)

$$q^2 - \left(2 + \lambda h^2\right)q + 1 = 0. \tag{5}$$

Его решение

$$q_{1,2} = 1 + \frac{\lambda h^2}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda h^2}{2}\right)^2 - 1} = 1 + \frac{\lambda h^2}{2} \pm \sqrt{\lambda h^2 + \frac{\lambda^2 h^4}{4}}. \tag{6}$$

Общее решение (4) имеет вид

$$\omega_n = C_1 q_1^{\,n} + C_2 q_2^{\,n}, \tag{7}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Из граничных условий $\omega_0 = \omega_N = 0$ получаем

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 q_1^{\,N} + C_2 q_2^{\,N} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Система (8) имеет нетривиальные решения, если $0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1^{\,N} & q_2^{\,N} \end{vmatrix} = q_2^{\,N} - q_1^{\,N}$, т.е. $q_2^{\,N} = q_1^{\,N}$.

По теореме Виета из (5) имеем $q_1 \cdot q_2 = 1$.

Тогда $1 = q_1^{\,N} \cdot q_2^{\,N} = q_1^{\,2N}$, и $q_1 = e^{i\frac{2\pi k}{2N}} = \cos\dfrac{\pi k}{N} + i\sin\dfrac{\pi k}{N}$, т.е. $|q_1| = 1$ и, следовательно, $|q_2| = 1$ и $q_2 = \bar{q}_1$.

Из $\operatorname{Re} q_1 = \cos\dfrac{\pi k}{N} = 1 + \dfrac{\lambda h^2}{2}$ находим, что

$$\lambda = \lambda_k = \frac{2}{h^2}\left(\cos\frac{\pi k}{N} - 1\right) = -\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{2N} \text{ -} \tag{9}$$

собственные числа.

Имеем $\omega_n = c_1 \cos\frac{\pi kn}{N} + c_2 \sin\frac{\pi kn}{N}$, где c_1 и c_2 - произвольные постоянные.

Из граничных условий $\omega_0 = \omega_N = 0$ получаем $c_1 = 0$, и $\omega_n = \omega_n^k = c_2 \sin\frac{\pi kn}{N}$, или, полагая $c_2 = 1$ [1] находим собственные функции

$$\omega_n^k = \sin\frac{\pi kn}{N}. \qquad (10)$$

Решение задачи (2) можно искать в виде

$$v_n = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \omega_n^k, \; n = 1, 2, \ldots, N-1 \text{ [2]}, \qquad (11)$$

где a_k неизвестные пока коэффициенты.

Разложим теперь правую часть уравнения (2) в сумму Фурье, т.е. представим ее в виде

$$f_n = \sum_{k=1}^{N-1} b_k \omega_n^k, \text{ где } b_k = \frac{\left(f, \omega^k\right)}{\left(\omega^k, \omega^k\right)} = \frac{1}{\left(\omega^k, \omega^k\right)} \sum_{n=1}^{N-1} f_n \omega_n^k h = \frac{2}{Nh} \sum_{n=1}^{N-1} f_n \omega_n^k h \text{ [3]}. \qquad (12)$$

Подставляя разложения (11), (12) в уравнение задачи (2), получаем

$$f_n = \sum_{k=1}^{N-1} b_k \omega_n^k = \Lambda_{\bar{x}x} v_n = \Lambda_{\bar{x}x} \sum_{k=1}^{N-1} a_k \omega_n^k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \Lambda_{\bar{x}x} \omega_n^k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \lambda_k \omega_n^k.$$

Учитывая линейную независимость функций ω^k, приходим к уравнениям

$$a_k \lambda_k = b_k. \qquad (13)$$

Откуда находим значения коэффициентов Фурье функции v_n:

---

[1] Собственные функции определяются с точностью до произвольного постоянного (не зависящего от *n*) не равного нулю множителя.

[2] $v_0 = v_N = 0$

[3] $$\left(\omega^k, \omega^k\right) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\omega_n^k\right)^2 h = \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2\frac{\pi kn}{N} h = \sum_{k=1}^{N} \sin^2\frac{\pi kn}{N} h = \sum_{k=1}^{N} \frac{1 - \cos\frac{2\pi kn}{N}}{2} h =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{h}{2} - \sum_{k=1}^{N} \frac{h}{2} \cos\frac{2\pi kn}{N} = \frac{Nh}{2} - \sum_{k=1}^{N} \frac{h}{4\sin\frac{\pi k}{N}} 2\sin\frac{\pi k}{N} \cos\frac{2\pi kn}{N} =$$

$$= \frac{Nh}{2} - \sum_{k=1}^{N} \frac{h}{4\sin\frac{\pi k}{N}} \left[\sin\frac{2\pi k(n+1/2)}{N} - \sin\frac{2\pi k(n-1/2)}{N}\right] =$$

$$= \frac{Nh}{2} - \frac{h}{4\sin\frac{\pi k}{N}} \left[\sin\frac{2\pi k(N+1/2)}{N} - \sin\frac{2\pi k(1-1/2)}{N}\right] =$$

$$= \frac{Nh}{2} - \frac{h}{4\sin\frac{\pi k}{N}} \left[\sin\left(2\pi k + \frac{\pi k}{N}\right) - \sin\frac{\pi k}{N}\right]$$

$$a_k=\frac{b_k}{\lambda_k}=\frac{2}{Nh\lambda_k}\sum_{n=1}^{N-1}f_n\omega_n^k h=\frac{2}{Nh\left(-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{2N}\right)}\sum_{n=1}^{N-1}f_n\sin\frac{\pi kn}{N}h=$$

$$=\frac{-h^2}{2N\sin^2\frac{\pi k}{2N}}\sum_{n=1}^{N-1}f_n\sin\frac{\pi kn}{N}h.$$

Таким образом

$$u_n=1+\sum_{k=1}^{N-1}a_k\omega_n^k=1+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{-h^2}{2N\sin^2\frac{\pi k}{2N}}\sum_{l=1}^{N-1}f_l\sin\frac{\pi kl}{N}h\sin\frac{\pi kn}{N}.$$

Из (9) находим, что $\left|\lambda_k\right|<\frac{4}{h^2}=\lambda_{\max}$.

Оценка снизу дает $\lambda_{\min}=\left|\lambda_1\right|=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2N}=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}=\pi^2\left(\frac{\sin\frac{\pi h}{2}}{\frac{\pi h}{2}}\right)^2$.

Так как $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ монотонно убывает[4] при, не ограничивая общности, $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, то

$$\lambda_{\min}\ge\pi^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}\right)^2=4\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2=2.$$

И число обусловленности $\mu=\|A\|\left\|A^{-1}\right\|=\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}=\frac{4/h^2}{2}=\frac{2}{h^2}$.

---

[4] $f'(x)=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{x\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}{x^2}=-\frac{x}{3}+o(x)<0$