Непосредственно из определения сходимости доказать, что разностная схема $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1+3\tau}$, $y_0 = 5$ сходится к решению задачи Коши $u' = -3u$, $u(0) = 5$.

Определение 1. Говорят, что решение разностной задачи y_n сходится к решению дифференциальной задачи u при $\tau \to 0$, если $\|y_n - \mathbf{U}_n\| \to 0$, где $\mathbf{U}_n$ — проекция точного решения на разностную сетку; причем, если имеет место оценка $\|y_n - \mathbf{U}_n\| \le c\tau^p$, $c \ne c(\tau)$, то сходимость имеет порядок p.

Решение задачи Коши: $\underline{u = 5e^{-3t}}$.

Общее решение ОДУ: $u = Ce^{-3t}$, из НУ $C = 5$.

Решение разностной задачи $\underline{y_n = \dfrac{5}{(1+3\tau)^n}}$

Решение разностного уравнения ищем в виде $y_n = q^n$.

Из РУ $q = \dfrac{1}{1+3\tau}$.

Общее решение РУ: $y_n = \dfrac{C}{(1+3\tau)^n}$. Т.к. $y_0 = 5$, то $C = 5$.

$$y_n = \frac{5}{(1+3\tau)^n} = 5e^{\ln\frac{1}{(1+3\tau)^n}} = 5e^{-n\ln(1+3\tau)\ 1} = 5e^{-n\left(3\tau - \frac{(3\tau)^2}{2} + O(\tau^3)\right)} = 5e^{-3n\tau}e^{n\left(\frac{(3\tau)^2}{2} + O(\tau^3)\right)} =$$

$$= 5e^{-3t_n}e^{\left(\frac{9\tau t_n}{2} + O(\tau^2)\right)}\ 2 = 5e^{-3t_n}\left(1 + \frac{9\tau t_n}{2} + O(\tau^2)\right).$$

$\mathbf{U}_n = 5e^{-3t_n}$.

$$\|y_n - \mathbf{U}_n\| = \left|5e^{-3t_n}\left(\frac{9\tau t_n}{2} + O(\tau^2)\right)\right| \le 45t_n e^{-3t_n}\tau = c\tau,\ c = 45t_n e^{-3t_n}$$ - не зависит от τ.

Т.о. схема сходится с первым порядком точности к решению задачи Коши.

---

[1] $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k} + \ldots$ при $|x| < 1$

[2] $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^k}{k!} + \ldots$