Теоретические вопросы к зачету по вычислительной математике

I. Численное интегрирование

1. Получить квадратурные формулы численного интегрирования:

-средних

-трапеций.

2. Получить формулу численного интегрирования Симпсона.
3. Получить формулу для оценки погрешности квадратурных формул численного интегрирования.
4. Получить локальную и глобальную погрешности для численного интегрирования по формуле трапеций.
5. Представить формулу численного интегрирования методом средних для функции двух переменных

$$\int_a^b \int_d^c f(x,y)dxdy$$

6. Квадратурная формула для численного интегрирования может быть представлена в виде

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n=0}^{N} C_n \cdot f(t_n) + r_N(t)$$

Для каких функций эта формула будет точкой $(r_N = 0)$; какой вид будут иметь весовые коэффициенты c_n в этом случае?

7. Возможно ли получить точную формулу численного интегрирования на N точках, если подынтегральная функция является полиномом степени M>N? Какова максимальная степень такого полинома?
8. Получите систему нелинейных уравнений для определения коэффициентов c_n и координат узловых точек t_n, при которых квадратурная формула

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n=0}^{N} C_n \cdot f(t_n) + r_N(t)$$

будет точна для полиномов степени 2(N+1), где – N – количество узловых точек.

9. Сформулируйте теорему Гаусса (о вычислении значения определенного интеграла).
10. Написать формулу для оценки погрешности численного интегрирования по методу Гаусса.
11. В чем состоит метод Канторовича выделения особенностей при численном интегрировании?
12. В чем состоит метод Филона приближенного вычисления интеграла от быстроосциллирующей функции:

$$\int_a^b f(t)\sin(\omega \mathrm{t})\mathrm{dt}; \omega >> 1?$$

13. Получите приближенную формулу для вычисления N-мерного интеграла в N-ой области интегрирования, находящейся в N-мерном кубе?
14. Получите формулу численного интегрирования Гаусса по двум узлам интегрирования.

II. Численное решение нелинейных алгебраических уравнений и систем.

1. Что такое сжимающее отображение?
2. Сформулируйте теорему о сжимающем отображении.
3. Получите достаточное условие сходимости итерационного процесса

$$u_{k+1} = F(u_k), u_0 = a$$

для численного решения нелинейного уравнения $u = F(u)$.

4. Как выглядит достаточное условие сходимости итерационного процесса

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_0 = a,$$

для численного решения системы нелинейных уравнений $u = F(u)$?

5. Дайте определение выпуклой области.
6. Сформулируйте теорему о том, в каком случае отображение $\mathbf{v} = F(\mathbf{u})$ является сжимающим.
7. Дайте геометрическую интерпретацию монотонной и немонотонной сходимости и расходимости итерационного процесса
$$u_{k+1} = F(u_k), u_0 = a.$$
8. Получите итерационную формулу Ньютона для численного решения скалярного нелинейного уравнения $f(x)$=0.

9. Как выглядит итерационный метод релаксации для численного решения нелинейного уравнения $f(x)$=0? При каких значениях x итерационного параметра он сходится?

10. Получите расчтеные формулы итерационного метода Ньютона, как метода линеаризации для системы нелинейных алгебраических уравнений.

11. Дайте графическую интерпретацию метода Ньютона.

12. Какой порядок сходимости имеет метод Ньютона?

13. Сформулируйте теорему о методе Ньютона.

14. Приведите пример итерационного метода 3-го порядка сходимости.

15. a). Представьте итерационный метод касательных для численного уравнения скалярного уравнения $f(x)$=0;

    b). метод Ньютона-Канторовича для численного решения системы нелинейных уравнений $\mathbf{f}(\mathbf{x})$=0.

16. Предложите вариационный итерационный метод для численного решения системы из двух нелинейных уравнений:
$$\begin{cases} f(u, \mathrm{v}) = 0 \\ g(u, \mathrm{v}) = 0. \end{cases}$$

17. Как выглядит одномерное логистическое отображение? Приведите пример двумерного отображения.

18. Что такое траектория отображения? Что такое предельная (неподвижная) точка отображения?

19. Как себя ведет отображение $u_{k+1} = \lambda u_k(1 - u_k), u_0 = a$ при

$$\begin{aligned} &\text{a)}.\ 0 \le \lambda \le 1 \\ &\text{b)}.\ 1 < \lambda \le 3 \qquad ? \\ &\text{c)}.\ 1 < \lambda \le 1 + \sqrt{6} \end{aligned}$$

20. Дайте определение периодической точки периода m. Что такое мультипликатор цикла? Что он показывает?

21. Дайте определение притягивающего цикла. Сформулируйте условие существования притягивающего цикла.

22 Изобразите графически функцию $f^2(x)$ для логистического отображения $u_{k+1} = \lambda u_k(1 - u_k)$. Какую информацию о свойствах данного отображения она дает?

23. Изобразите графически каскады Фейгенбаума.

24. Что означают константы Фейгенбаума?

25. Представьте итерационные формулы метода Ньютона для системы из двух уравнений.

26. Постройте итерационный процесс Ньютона для вычисления $\sqrt[n]{a}$, $a>0, n$ – натуральное.

III. Метод наименьших квадратов

5. Получите систему из двух линейных алгебраических уравнений для решения методом наименьших квадратов переопределенной системы из трех линейных уравнений.

2. Сформулируйте теорему о методе наименьших квадратов.

3. Проведите прямую, проходящую наиболее близко к четырем точкам в смысле метода наименьших квадратов.

4. Что такое обобщенный полином? Что дает использование систем ортогональных функций ортогональных функций для приближения функции методом наименьших квадратов?

5. Как выглядит матрица Гильберта? В чем состоит ее главная особенность?

6. Изложите идею метода спектральной эквивалентности матриц для численного решения плохо обусловленных систем уравнений.

7. В чем состоит метод предобуславливания для численного решения плохо обусловленных систем линейных уравнений?

8. В чем состоит метод ортогонализации для численного решения плохо обусловленных систем алгебраических уравнений?

9. Пусть задана переопределенная система линейных алгебраических уравнений $Au = f(*)$. Как будет выглядеть соответствующая система линейных алгебраических уравнений с квадратичной матрицей, полученная для решения ($*$) методом наименьших квадратов?

IV. Интерполяция функций

1. Формулировка задачи интерполяции

2. Теорема о точности кусочно-линейной интерполяции (формулировка).

3. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи интерполяции при приближении функции обобщенным полиномом.

4. Сформулируйте теорему об условии линейной независимости системы функций $\varphi_n(t_k), k = 0 \div n, n = 0 \div N$.

5. Почему удобно использовать для интерполяции систему ортогональных функций $\varphi_n(t_k), k = 0 \div n, n = 0 \div N$?

6. Как выглядят базисные функции Лагранжа? Как выглядит интерполяционный полином Лагранжа, представленный через эти базисные функции?

7. Сформулируйте теорему об остаточном члене интерполяции.

8. Оцените остаточный член интерполяции для $\tau = const$ (τ - шаг интерполяции).

9. Почему экстраполяция является, вообще говоря, неустойчивым процессом?

10. Что такое разделенные разности? Выпишите их с помощью рекуррентных соотношений.

11. Что такое конечные разности? Выписать с 1-ой по 4-ую.

12. Представить интерполяционный полином Ньютона в общем случае; в линейном и квадратичном случае. В чем удобство записи интерполяционного полинома в форме Ньютона?

13. Вид полиномов Чебышева.

14. Постоянная Лабега.

15. Теорема Чебышева, о полиноме, наименее уклоняющемся от нуля.

16. Задача интерполяции с кратными узлами. Пример.

17. Сформулируйте теорему об остаточном члене интерполяционного полинома с кратными узлам.

18. Определение сплайна $S_{m,d}(t)$.

19. Определение кубического сплайна.

20. Теорема о существовании и единственности интерполяционного кубического сплайна.

21. Как строится кубический сплайн?

22. Теорема о точности сплайн-интерполяции (формулировка).

23. Формулировка теоремы об экстремальном свойстве кубических сплайнов.

24. Определение B-сплайна. Пример, B-сплайна для N=2 ((N-1) – степень сплайна).

25. Как выглядит интерполяционный полином Лагранжа первой степени для функции двух переменных?

26. Общая формула интерполяционного полинома Лагранжа для функции двух переменных.

27. Выпишите интерполяционные полиномы Лагранжа 1-ой и 2-ой степени и их остаточные члены.

V. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

1 Определение согласованных и подчиненных норм матриц и векторов.

2 Определение согласованных и подчиненных норм матриц и векторов.

3 Три нормы вектора и соответствующие им три подчиненных нормы матрицы.

4 Получить третью (спектральную) норму матрицы.

5 Теорема о погрешности решения СЛАУ; число обусловленности СЛАУ μ .

6 Показать, что $\mu \geq 1$.

7 Показать, что $\mu = \frac{|max\,\lambda_i|}{|mix\lambda_i|}$ для симметричной матрицы А.

8 Алгоритм численного решения СЛАУ с матрицей треугольной структуры (прямой, не итерационный).

9 Алгоритм прямого *и* обратного хода метода Гаусса.

10 Представить метод Гаусса через операции с матрицами.

11 Метод Гаусса с выбором главного элемента; условие применимости метода Гаусса.

12 LU-разложение; алгоритм. Оценка количества арифметических действий метода гаусса и LU-разложения.

13 Метод Холецкого (алгоритм численного решения).

14 Каноническая форма записи итерационного процесса для численного решения СЛАУ.

15 Достаточное условие сходимости метода простой итерации (МПИ) для численного решения СЛАУ.

16 Дать оценку количества итераций для получения заданной точности ε при численном решении СЛАУ.

17 Критерий сходимости итерационного процесса для численного решения СЛАУ; сравнение количества арифметических действий прямых и итерационных методов.

18 Влияние ошибок округления на результат численного решения СЛАУ.

19 Методы Якоби, Зейделя, релаксации (алгоритмы).

20 Достаточные условия сходимости методов Якоби, Зейделя (получить).

21 Критерий сходимости метода Якоби (получить); условие сходимости метода Зейделя для симметричной матрицы.

22 Связь между вариационной задачей и задачей решения СЛАУ (теорема).

23 Метод градиентного и наискорейшего спуска (вывод).

24 Метод минимальных невязок (вывод).

25 Метод сопряженных градиентов (без вывода).

VI. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Представить задачу

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), u(0) = a$$

в операторном виде.

2. Представить разностную задачу

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = f(t_n, u_n), u(0) = a$$

в операторном виде.

3. Определение сходимости, аппроксимации, устойчивости.

4. Теорема Рябенького о сходимости.

5. Получите формулы первого и второго порядков точности для численного решения интегрирования ($*$) исходя из соотношения

$$u(t_n + \tau) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+\tau} u'(t)dt.$$

6. Как реализовать следующие алгоритмы численного решения ($*$):

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = f(t_n, u_n), u_0 = a$$

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = f(t_{n+1}, u_{n+1}), u_0 = a\,?$$

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{\tau} = f(t_n, u_n), u_0 = a$$

7. Представьте расчетные формулы методов Рунге–Кутта для численного решения ($*$).

8. Таблица Бутгера.

9. Получить метод Рунге–Кутта 1-го порядка точности путем разложения погрешности в ряд Маклорена.

10. Методы Рунге–Кутта 2-го порядка точности.

11. Метод Рунге–Кутта 4-го порядка точности.

12. Оценка погрешности по правилу Рунге–Кутта. Вложенные формулы Рунге–Кутта.

13. Теорема об устойчивости методов Рунге–Кутта.

14. Как выбирать шаг τ численного интегрирования ($*$)?

15. До каких времен t_n можно проводить численное интегрирование по методу Рунге–Кутта 4-го порядка точности, если правая часть обладает только свойством Липшиц–непрерывности (непрерывные производные отсутствуют)?

16. Теорема об интегрировании методом Рунге–Кутта k-го порядка точности на устойчивых нейтральных траекториях.

17. До каких времен t_n можно проводить численное интегрирование по методу Рунге–Кутта 4-го порядка на устойчивых и нейтральных траекториях.

18. Чем отмечаются явные и неявные схемы? Как различаются методы численного решения $(*)$ по явным и неявным схемам?

VII. Численное решение жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

1. Привести пример жесткой системы ОДУ.

2. Чем различаются жесткие и нежесткие задачи?

3. Дать определение жесткой системе ОДУ.

4. Как выбрать шаг по времени для численного решения жесткой системы ОДУ по явной схеме?

5. Как можно численно решать систему ОДУ, если она описывает физические процессы с существенно разными характерными временами?

6. Представьте общее решение разностного уравнения (по явному методу Эйлера) для численного решения жесткой системы ОДУ

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{Bu}, \mathbf{u}(0) = \mathbf{a}. \qquad (*)$$

7. Сравните его с общим решением системы $(*)$, где B – квадратная матрица с постоянными коэффициентами (линейная система).

8. То же для неявной схемы Эйлера.

$A, A(L), A(0), L-$ устойчивость разных методов для численного решения жестких систем ОДУ.

9. Докажите L – устойчивость неявного метода Эйлера.

10. Представьте систему ОДУ Тихонова. К какому виду систем принадлежит регулярно или сингулярно возмущенным системам? Покажите, что эта система жесткая.

11. Дать определение регулярно и сингулярно возмущенным системам ОДУ.

12. Расскажите, как будет вести себя решение системы ОДУ вида

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u} = \mathrm{v} - \frac{1}{3}u^3 + u, \\ \dot{\mathrm{v}} = -u, \end{cases} \qquad (**) \quad u(0) = u_0, \mathrm{v}(0) = \mathrm{v}_0$$

на плоскости $\{u, \mathrm{v}\}$?

13. Какая главная опасность существует при численном решении системы ОДУ по неявной схеме (на примере $(**)$)?

14. Метод удвоенного аргумента.

15. Представьте вид неявных методов Рунге–Кутта.

16. Как выглядит таблица Бутчера для неявного метода численного решения ОДУ?

17. Одноитерационный метод Розенброка.

18. Представьте общий вид неявного численного метода решения ОДУ.

VIII. Погрешность вычислений

1. Отличие вычислительной математики от классических математических курсов. Понятия обусловленности задачи, устойчивость, алгоритма, погрешности вычислений.

2. Определить погрешность приближенного вычисления производной u_t' по формулам:

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h},$$
$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}.$$

3. Оценить оптимальный шаг численного дифференцирования, учитывающий погрешность метода и ошибку округления для приближенной формулы:

$$u_x' \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}.$$

4. Дайте определение абсолютной и относительной погрешности приближения.

5. Определение предельной абсолютной погрешности.

6. Как оценить погрешность приближения некоторой величины, с помощью производных этой величины по параметрам, от которых она зависит?

7. Приведите:

-формулы для оценки абсолютной предельной погрешности (а.п.п.) суммы величин с известными а.п.п.;

-формулы для оценки относительной предельной погрешности (о.п.п.) произведения величин с известными (о.п.п.).