

1. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z}{\cos z}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{z}{\cos z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^4 - 1}$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z+2i}{z+i} \cos \frac{2}{z} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 + \cos \varphi}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos(3-5x)}{x^2 + 2x + 17} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$ допускает многозначная функция $\sqrt{z^2 - 1}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{2z^4 - 2z^2}$ в \mathbb{C} с разрезом по отрезку $[-1; 1]$, такая, что $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}$. Вычислить $g(-\sqrt{2})$.
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь $\sqrt{\frac{16z^2 + 1}{z^2}}$ в плоскости с разрезом по отрезку $\left[0; \frac{i}{4}\right]$ и по дуге окружности $\left|z - \frac{1}{3}\right| = \frac{5}{12}$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, причем $g\left(\frac{1}{3}\right) = 5$. Разложить $g(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z = \infty$. Найти область сходимости полученного ряда и вычислить сумму ряда в точке $z = \frac{1}{3}$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \operatorname{Ln}(z^2 + 1)$, б) $F_2 = \operatorname{Ln} \frac{z+i}{z-i}$? Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{dx}{(x+2)^2}$.
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{2z^4 - 2z^2}$ в \mathbb{C} с разрезом по отрезку $[-1; 1]$, такая, что $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}$. Вычислить $\oint_{|z|=\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{\cos \frac{1}{z}}{g(z) + iz} dz$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_1 \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = (z-1)^5(z-5)$.
- b. Найти число корней уравнения $z^8 + 5z^7 - z^4 + 2 = 0$ в кольце $4 < |z| < 6$.
- c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $ze^{\lambda-z} = 1$ имеет в круге $\{z : |z| \leq 1\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

2. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z}{\sin z}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{z}{\sin z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin 3z}{(z-1)^2} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{z+i} \cos \frac{2i}{z} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi + 3}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\sin(1-4x)}{x^2 - 2x + 26} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$ допускает многозначная функция $\operatorname{Ln} \frac{z-1}{z+1}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{z^4 - 3z^2}$ в \mathbb{C} с разрезом по отрезку $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$, такая, что $g(2) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}$. Вычислить $g(-2)$ и $g'(-2)$.
- c. Пусть $h(z)$ - регулярная ветвь $\operatorname{Ln} \left(\frac{z^2 - 1}{z^2} \right)$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-1; 1]$, причем $\operatorname{Im} h\left(-\frac{i}{5}\right) = 0$. Разложить $h(z)$ в ряд Лорана по степеням $z+i$. Найти область сходимости полученного ряда и вычислить сумму ряда в точке $z = -\frac{i}{5}$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [-2i, 2i]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \operatorname{Ln}(z(z^2 + 4))$, б) $F_2 = \operatorname{Ln} \frac{z}{z^2 + 4}$? Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt[3]{x^2(2-x)}}$.
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{z^4 - 3z^2}$ в \mathbb{C} с разрезом по отрезку $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$, такая, что $g(2) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}$. Вычислить $\oint_{|z|=\frac{9}{5}} \frac{z^2 + z + 1}{z(g(z) + i\sqrt{2})} dz$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_1 \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{z-5}{(z-1)^5}$.
- b. Найти число нулей многочлена $z^3 - 2z - 5$ в области $D: |z| < 1$.
- c. Определить число корней многочлена $P_5(z) = z^5 - 12z^2 + 14$ в правой полуплоскости $\{z: \operatorname{Re} z > 0\}$.

3. ТФКП Курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{1}{shz}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{1}{shz}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \sin\left(\frac{z+1}{z}\right) dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^2}{z-i} \sin \frac{i}{z} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5-4\cos\varphi}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+3}{x^4+10x^2+9} dx$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos(2-3x)}{x^2-2x+10} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ допускает многозначная функция $\sqrt{z^2-1}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt{z^2+1}\right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-i) = \frac{3\pi}{4}\right\}$, причем $g(0)=1$. Вычислить $g(3\sqrt{7})$.
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь $\sqrt{\frac{9z^2-1}{z^2}}$ в плоскости с разрезом по отрезку $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ и по дуге окружности $\left|z - \frac{i}{4}\right| = \frac{5}{12}$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, причем $g\left(\frac{i}{2}\right) = \sqrt{13}$. Разложить $g(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z = \infty$. Найти область сходимости полученного ряда и вычислить сумму ряда в точке $z = \frac{i}{2}$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли выделить регулярные ветви многозначной функции $F(z) = \sqrt[5]{(z^2-1)^2}$ в области $U = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} \frac{dx}{(x+3)^2}$
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[4]{2z^4-8z^2}\right\}$ в \mathbb{C} с разрезом по отрезку $[-2; 2]$, такая, что $g(-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}$. Вычислить $\oint_{|z|=\frac{9}{5}} \frac{e^{1/z^2}}{g(z)+iz} dz$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_{2i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = (z-2i)^4(z+4)$.
- b. Найти число корней уравнения $z^4 + 4z + \cos z = 0$ в круге $|z| < 1$.
- c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $z + \lambda - e^z = 0$ имеет в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

4. ТФКП Курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{shz}{z^6}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{shz}{z^6}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z-1)^2} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{z}{z-2i} e^{\frac{2i}{z}} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\cos \varphi + 2)^2}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2}$.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos(2-3x)}{x^2 - 2x + 10} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ допускает многозначная функция $\operatorname{Ln} \frac{z-1}{z+1}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \operatorname{Ln} \frac{z^2+1}{26} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Re} z \leq 0\}$, $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-i) = \frac{\pi}{4}\}$, причем $g(5) = 0$. Вычислить $g(3\sqrt{3}i)$.
- c. Пусть $h(z)$ - регулярная ветвь $\operatorname{Ln} \left(\frac{1+z^2}{z^2} \right)$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-i, i]$, причем $\operatorname{Im} h\left(\frac{1}{5}\right) = 0$. Разложить $h(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-1$. Найти область сходимости полученного ряда и вычислить сумму ряда в точке $z = \frac{1}{5}$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли выделить регулярные ветви многозначной функции $F(z) = \sqrt[4]{(z^2+1)^3}$ в области а) $U_1 = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$. Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt[4]{x^3(1-x)}}$.
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \sqrt[4]{z^4 - z^2} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом по отрезку $[-1, 1]$, такая, что $g(\sqrt{2}) = \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}$. Вычислить $\oint_{|z|=\frac{4}{3}} \frac{z^2 + \sqrt{2}z + 1}{z(g(z) + i\sqrt{2})} dz$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_{2i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{z-4}{(z-2i)^4}$.
- b. Определить число нулей многочлена $z^5 - 12z^2 + 14$ в кольце $1 < |z| < \frac{5}{2}$.
- c. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $\{z : |z| < 1\}$ и $|f(z)| < 1$ на окружности $\{z : |z| = 1\}$. Доказать, что внутри единичного круга существует точка z_0 такая, что $f(z_0) = z_0$.

5. ТФКП Курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \left(z^5 \cos \frac{1}{z} \right)$ и $\operatorname{res}_\infty \left(z^5 \cos \frac{1}{z} \right)$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2+1} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=3} \frac{(z-2)^3}{z-4} \sin \left(\frac{1}{2-z} \right) dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi + 1}{\sin \varphi + 2} d\varphi$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\cos(3-x)}{x^2-2x+2} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{[0, 1]\}$ допускает многозначная функция $\sqrt[3]{z(z-1)}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{1-7z^2}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{\sqrt{7}}, \operatorname{Im} z \leq 0 \right\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg \left(z + \frac{1}{\sqrt{7}} \right) = \frac{3\pi}{4} \right\}$, причем $g(0) = 1$. Вычислить $g(-2)$, $g'(-2)$.
- c. Регулярная ветвь многозначной функции $g(z) = \sqrt{\frac{chz}{i-z}}$ в плоскости с разрезом $\{z \in \mathbb{C} : z = i+t, t \geq 0\}$ определена условием $g'(0) = \frac{1}{2} e^{\frac{5\pi}{4}}$. Найти первые три члена разложения $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-2i)$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [-3, 3]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \sqrt{\frac{z-3}{(z+3)^2}}$, б) $F_2 = \sqrt[3]{(z-3)^2(z+3)^4}$? Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt[4]{x-1} \cdot (x^2+3)} dx$
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{z^2+1}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-i) = \frac{3\pi}{4} \right\}$, причем $g(0) = 1$. Вычислить $\oint_{|z-5-5i|=6} \frac{dz}{g^2(z)-2g(z)-8}$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{(z-i)^3}{(z-3)^2}$.
- b. Найти число нулей многочлена $z^3 - 2z - 5$ в области $D : 1 < |z| < 3$.
- c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $1 + ze^{\lambda+z} = 0$ имеет в круге $\{z : |z| \leq 1\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

6. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z}{\cos \frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{z^3 \cdot e^{\frac{1}{z-1}}}{1+z} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1+\sin^2 \varphi}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^6+1}$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^\infty \frac{(x-3)\sin(2-x)}{x^2-2x+2} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ допускает многозначная функция $\operatorname{Ln}(z^2 - 1)$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \operatorname{Ln} \frac{z^2 - 1}{17} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-1) = \frac{\pi}{4} \right\}$, причем $g(4i) = -\pi i$. Вычислить $g(3\sqrt{2})$, $g'(3\sqrt{2})$.
- c. Регулярная ветвь многозначной функции $g(z) = e^{-z} \cdot \operatorname{Ln}(z-1)$ в плоскости с разрезом $\{z \in \mathbb{C} : z = 1 - it, t \geq 0\}$ определена условием $g''(0) = 1 - i\pi$. Найти первые три члена разложения $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-2)$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \sqrt{\frac{(z-1)^3}{(z+1)^3}}$, б) $F_2 = \sqrt[4]{(z-1)^{10}(z+1)^2}$? Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-2}^{-1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \sqrt[3]{\frac{x+2}{x+1}} dx$
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \operatorname{Ln} \frac{z^2+1}{26} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Re} z \leq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-i) = \frac{\pi}{4} \right\}$, причем $g(5) = 0$. Вычислить $\oint_{|z+5-5i|=6} \frac{dz}{g^2(z) + \pi i g(z) + 2\pi^2}$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{(z-3)^2}{(z-i)^3}$.
- b. Найти число корней уравнения $3z^4 + \operatorname{ch} iz = 0$ в круге $|z| < \frac{1}{2}$.
- c. Доказать, что уравнение $(2z+1)e^z = 2z+3$ не имеет решений с положительной действительной частью.

7. ТФКП Курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z^2}{\sin \frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{z}{\cos \frac{1}{z}} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=3/2} \frac{z-i}{z+2i} \sin\left(\frac{z+i}{z-i}\right) dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{5+3\cos \varphi} d\varphi$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^3}$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos(3-x)}{x^2-4x+5} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ допускает многозначная функция $\sqrt[3]{\frac{z}{z-1}}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{z^2+1}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-i) = \frac{3\pi}{4}\right\}$, причем $g(0)=1$. Вычислить $g(3i)$, $g'(3i)$.
- c. Регулярная ветвь многозначной функции $g(z) = \left\{e^{\frac{iz}{3}} \cdot \sqrt[3]{1+z}\right\}$ в плоскости с разрезом $\{z \in \mathbb{C} : z = -1-it, t \geq 0\}$ определена условием $g'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{3} e^{\frac{7\pi i}{12}}$. Найти первые три члена разложения $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+2)$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \sqrt[3]{\frac{(z+2)^4}{(z-2)^2}}$, б) $F_2 = \sqrt{(z-2)^3(z+2)}$? Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-1}^{\infty} \frac{\ln(x+1) \cdot \sqrt[4]{x+1}}{x^2+4x+4} dx$
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{1-7z^2}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{\sqrt{7}}, \operatorname{Im} z \leq 0\right\}$, $\gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg\left(z + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{3\pi}{4}\right\}$, причем $g(0)=1$. Вычислить $\oint_{|z+4+i|=5} \frac{dz}{g^2(z) - g(z) - 12}$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_{-i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = z^4 + 2z^2 + 1$.
- b. Найти число корней уравнения $z^8 + 5z^7 - z^4 + 2 = 0$ в круге $|z| < 1$.
- c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $z = \lambda - e^{-z}$ имеет в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

8. ТФКП Курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_{\frac{1}{e}} \frac{z}{e^z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z+1|=1/2} \frac{z^3 + z}{z-1} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{1}{z+1}\right) dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2 + 3 \cos^2 \varphi)^2}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+3)\sin(1-x)}{x^2 - 4x + 5} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ допускает многозначная функция $\sqrt{z^4 - 1}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \operatorname{Ln} \frac{z^2 + 1}{26} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Re} z \leq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-i) = \frac{\pi}{4} \right\}$, причем $g(5) = 0$. Вычислить $g(-5)$, $g'(-5)$.
- c. Регулярная ветвь многозначной функции $g(z) = \left\{ \cos z \cdot \sqrt[3]{z+i} \right\}$ в плоскости с разрезом $\{z \in \mathbb{C} : z = -i - t, t \geq 0\}$ определена условием $g''(0) = \frac{7}{9} e^{\frac{7\pi i}{6}}$. Найти первые три члена разложения $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z + 2i)$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus \{-2, -1\} \cup [1, 2]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а)

$$F_1 = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2 - 4}}, \text{ б) } F_2 = \sqrt{(z^2 - 1)(z^2 - 4)}? \text{ Ответ обязательно обосновать.}$$

- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-1}^0 \frac{x \cdot \sqrt[3]{x(x+1)^2}}{x^2 + 1} dx$
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \operatorname{Ln} \frac{z^2 - 1}{17} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-1) = \frac{\pi}{4} \right\}$, причем $g(4i) = -\pi i$. Вычислить

$$\oint_{|z-5+5i|=6} \frac{dz}{g^2(z) - \pi i g(z) + 2\pi^2}$$

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_{-i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1}$.
- b. Определить число нулей многочлена $z^5 - 12z^2 + 14$ в кольце $1 < |z| < 2$.
- c. Доказать, что уравнение $z \sin z = 1$ имеет только действительные корни.

9. ТФКП Курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_{\infty} z e^{\frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin \frac{1}{z} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{(z-1)^3 \sin \frac{1}{z-1}}{(z+1)^2} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(4-3\sin^2 \varphi)^2}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+2)\cos(2-2x)}{x^2+4x+5} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$ допускает многозначная функция $\operatorname{Ln}(z^2 - 1)$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{1-7z^2}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{\sqrt{7}}, \operatorname{Im} z \leq 0\right\}$, $\gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg\left(z + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{3\pi}{4}\right\}$, причем $g(0) = 1$. Вычислить $g(-3i)$.
- c. Пусть $f(z)$ - регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{z^4 + 64}$ в плоскости с разрезами по лучам $\{z : z = 2 - 2it, t \geq -1\}$ и $\{z : z = -2 - 2it, t \geq -1\}$, выделяемая условием $f(2\sqrt{2}) = 4\sqrt[3]{2}$. Вычислить $f(0)$. Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 0$. Найти радиус сходимости. Вычислить отношение суммы ряда к $f(z)$ при $z = -\frac{5}{2}$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \sqrt[3]{\frac{z}{1-z}}$, б) $F_2 = \sqrt[3]{z(1-z)}$? Ответ обязательно обосновать.

- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-3}^{-1} \frac{\sqrt[5]{(x+1)^2(x+3)^3}}{x-1} dx$

- c. Пусть $f(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\operatorname{Ln}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right\}$ в области $G = \{z \mid |z| > 1\}$ такая, что $f(\infty) = 0$. Доказать, что многозначная функция $\left\{\sqrt{f(z)+4i}\right\}$ распадается в G на регулярные ветви. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь функции $\left\{\sqrt{f(z)+4i}\right\}$ в G такая, что $g(\infty) = -\sqrt{2}(i+1)$. Вычислить интеграл $J = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{g(z)}$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = z^5 + z^3$.
- b. Найти число корней уравнения $z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0$ в круге $|z| < 1$.
- c. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $\{z : |z| < 1\}$. Доказать, что существует такое число $\rho > 0$, что для всех w из круга $\{w : |w| < 1\}$ уравнение $z = wf(z)$ имеет в круге $\{z : |z| < 1\}$ ровно один корень.

10. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_{\infty} \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=3} \frac{(z+1)^3 \sin \frac{1}{z}}{z-1} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{5 + 3 \cos \varphi} d\varphi$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{\infty} \frac{x^4}{(x^2 + 2)^4} dx$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin(1-x)}{x^2 + 2x + 2} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$ допускает многозначная функция $\sqrt{z^2 + 1}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \operatorname{Ln} \frac{z^2 - 1}{17} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-1) = \frac{\pi}{4} \right\}$, причем $g(4i) = -\pi i$. Вычислить $g(-4i)$.
- c. Пусть $f(z)$ - регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}(z + iz^2)$ в плоскости с разрезами по положительной части действительной оси и по отрезку $[0; i]$ мнимой оси, выделяемая условием $\operatorname{Im} f\left(e^{-\frac{i\pi}{6}}\right) = 0$. Вычислить $f\left(1 + \frac{i}{2}\right)$. Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 1 + \frac{i}{2}$. Найти радиус сходимости. Вычислить сумму ряда при $z = e^{-\frac{i\pi}{6}}$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \operatorname{Ln} \frac{z}{z-1}$, б) $F_2 = \operatorname{Ln} \frac{z^2}{z-1}$? Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2 \sqrt{(x+1)^2 (x+2)^5}}$
- c. Пусть $f(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \sqrt{\frac{z-4}{z+4}} \right\}$ в области $G = \{z \mid |z| > 4\}$ такая, что $f(\infty) = -1$. Доказать, что многозначная функция $\{\operatorname{Ln}(f(z)-1)\}$ распадается в G на регулярные ветви. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь функции $\{\operatorname{Ln}(f(z)-1)\}$ в G такая, что $g(\infty) = \ln 2 + i\pi$. Вычислить интеграл $J = \oint_{|z|=5} \frac{dz}{g(z)}$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{1}{z^5 + z^3}$.
- b. Определить число нулей многочлена $z^5 - 12z^2 + 14$ в области $|z| > 2$.
- c. Определить число корней многочлена $P_5(z) = z^5 - 12z^2 + 14$ в левой полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.

11. ТФКП Курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z}{\cos z}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{z}{\cos z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=3} \frac{(z-1)^2 e^{\left(\frac{1}{z-1}\right)}}{z+1} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(4-3\sin^2 \varphi)^2}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\cos(1-x)}{x^2-4x+5} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{[0, 1]\}$ допускает многозначная функция $\sqrt[3]{\frac{z}{z-1}}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \operatorname{Ln} \frac{z^2-1}{17} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-1) = \frac{\pi}{4} \right\}$, причем $g(4i) = -\pi i$. Вычислить $g(3\sqrt{2})$, $g'(3\sqrt{2})$.
- c. Регулярная ветвь многозначной функции $g(z) = \left\{ \frac{chz}{\sqrt{i-z}} \right\}$ в плоскости с разрезом $\{z \in \mathbb{C} : z = i+t, t \geq 0\}$ определена условием $g'(0) = \frac{1}{2} e^{\frac{5\pi i}{4}}$. Найти первые три члена разложения $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-2i)$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли выделить регулярные ветви многозначной функции $F(z) = \sqrt[4]{(z^2+1)^3}$ в области а) $U_1 = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$. Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_1^4 \frac{\sqrt[5]{(x-1)(4-x)^4}}{x+2} dx$
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \sqrt[4]{2z^4-8z^2} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом по отрезку $[-2; 2]$, такая, что $g(-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}$. Вычислить $\oint_{|z|=\frac{9}{5}} \frac{e^{1/z^2}}{g(z)+iz} dz$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_1 \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{z-5}{(z-1)^5}$.
- b. Определить число нулей многочлена $z^5 - 12z^2 + 14$ в области $|z| > 2$.
- c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $ze^{\lambda-z} = 1$ имеет в круге $\{z : |z| \leq 1\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

12. ТФКП 3 курс 5 семестр 1 задание

ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z}{\sin z}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{z}{\sin z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^4 - 1}$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{(z+1)^2 e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{5 + 3 \cos \varphi} d\varphi$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^\infty \frac{(x-1)\sin(2-x)}{x^2 - 2x + 2} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ допускает многозначная функция $\sqrt{z^4 - 1}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{z^2 + 1}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-i) = \frac{3\pi}{4}\right\}$, причем $g(0) = 1$. Вычислить $g(3i)$, $g'(3i)$.
- c. Регулярная ветвь многозначной функции $g(z) = e^{-z} \cdot \operatorname{Ln}(z-1)$ в плоскости с разрезом $\{z \in \mathbb{C} : z = 1 - it, t \geq 0\}$ определена условием $g''(0) = 1 - i\pi$. Найти первые три члена разложения $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-2)$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [-3, 3]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \sqrt[3]{\frac{z-3}{(z+3)^2}}$, б) $F_2 = \sqrt[3]{(z-3)^2(z+3)^4}$? Ответ обязательно обосновать..
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_2^4 \frac{dx}{x^2 \sqrt{(x-2)(x-4)^6}}$
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{z^4 - z^2}$ в \mathbb{C} с разрезом по отрезку $[-1; 1]$, такая, что $g(\sqrt{2}) = \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}$. Вычислить $\oint_{|z|=\frac{4}{3}} \frac{z^2 + \sqrt{2}z + 1}{z(g(z) + i\sqrt{2})} dz$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_{2i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = (z-2i)^4(z+4)$.
- b. Найти число корней уравнения $z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0$ в круге $|z| < 1$.
- c. Определить число корней многочлена $P_5(z) = z^5 - 12z^2 + 14$ в правой полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$.

13. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{1}{shz}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{1}{shz}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin 3z}{(z-1)^2} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{\sin \frac{1}{z}}{1 - \cos \frac{1}{z}} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 + \cos \varphi}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^\infty \frac{x^4}{(x^2 + 2)^4} dx$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^\infty \frac{(x-3)\cos(7-6x)}{x^2 + 2x + 5} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$ допускает многозначная функция $\operatorname{Ln}(z^2 - 1)$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \operatorname{Ln} \frac{z^2 + 1}{26} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Re} z \leq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-i) = \frac{\pi}{4} \right\}$, причем $g(5) = 0$. Вычислить $g(-5)$, $g'(-5)$.
- c. Регулярная ветвь многозначной функции $g(z) = \left\{ e^{\frac{iz}{3}} \cdot \sqrt[3]{1+z} \right\}$ в плоскости с разрезом $\{z \in \mathbb{C} : z = -1 - it, t \geq 0\}$ определена условием $g'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{3} e^{\frac{7\pi i}{12}}$. Найти первые три члена разложения $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+2)$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \sqrt{\frac{(z-1)^3}{(z+1)^3}}$, б) $F_2 = \sqrt[4]{(z-1)^{10}(z+1)^2}$? Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \sqrt[3]{z^2 + 1} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-i) = \frac{3\pi}{4} \right\}$, причем $g(0) = 1$. Вычислить $\oint_{|z-5-5i|=6} \frac{dz}{g^2(z) - 2g(z) - 8}$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_{2i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{z-4}{(z-2i)^4}$.
- b. Определить число нулей многочлена $z^5 - 12z^2 + 14$ в кольце $1 < |z| < 2$.
- c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $z + \lambda - e^z = 0$ имеет в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

14. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{shz}{z^6}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{shz}{z^6}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \sin\left(\frac{z+1}{z}\right) dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} \frac{1}{z}}{i - \operatorname{sh} \frac{1}{z}} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi + 3}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+7)\sin(5-3x)}{x^2 + 2x + 2} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$ допускает многозначная функция $\sqrt{z^2 + 1}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{1 - 7z^2}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{\sqrt{7}}, \operatorname{Im} z \leq 0\right\}$, $\gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg\left(z + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{3\pi}{4}\right\}$, причем $g(0) = 1$. Вычислить $g(-3i)$.
- c. Регулярная ветвь многозначной функции $g(z) = \left\{\cos z \cdot \sqrt[3]{z+i}\right\}$ в плоскости с разрезом $\{z \in \mathbb{C} : z = -i - t, t \geq 0\}$ определена условием $g''(0) = \frac{7}{9} e^{\frac{7\pi}{6}}$. Найти первые три члена разложения $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z + 2i)$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \sqrt[3]{\frac{(z+2)^4}{(z-2)^2}}$, б) $F_2 = \sqrt{(z-2)^3(z+2)}$? Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}}{x^2} dx$.
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\operatorname{Ln} \frac{z^2 + 1}{26}\right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Re} z \leq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-i) = \frac{\pi}{4}\right\}$, причем $g(5) = 0$. Вычислить $\oint_{|z+5-5i|=6} \frac{dz}{g^2(z) + \pi i g(z) + 2\pi^2}$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{(z-i)^3}{(z-3)^2}$.
- b. Найти число корней уравнения $z^8 + 5z^7 - z^4 + 2 = 0$ в круге $|z| < 1$.
- c. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $\{z : |z| < 1\}$ и $|f(z)| < 1$ на окружности $\{z : |z| = 1\}$. Доказать, что внутри единичного круга существует точка z_0 такая, что $f(z_0) = z_0$.

15. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \left(z^5 \cos \frac{1}{z} \right)$ и $\operatorname{res}_\infty \left(z^5 \cos \frac{1}{z} \right)$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z-1)^2} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{z \cos \frac{1}{z}}{1 + \sin \frac{1}{z}} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4 \cos \varphi}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2+x) \cos(3-7x)}{x^2 - 4x + 5} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$ допускает многозначная функция $\sqrt{z^2 - 1}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \operatorname{Ln} \frac{z^2 - 1}{17} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-1) = \frac{\pi}{4} \right\}$, причем $g(4i) = -\pi i$. Вычислить $g(-4i)$.
- c. Пусть $f(z)$ - регулярная ветвь функции $\left\{ \sqrt[3]{z^4 + 64} \right\}$ в плоскости с разрезами по лучам $\{z : z = 2 - 2it, t \geq -1\}$ и $\{z : z = -2 - 2it, t \geq -1\}$, выделяемая условием $f(2\sqrt{2}) = 4\sqrt[3]{2}$. Вычислить $f(0)$. Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 0$. Найти радиус сходимости. Вычислить отношение суммы ряда к $f(z)$ при $z = -\frac{5}{2}$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus \{[-2, -1] \cup [1, 2]\}$ выделить регулярные ветви многозначных функций а)

$$F_1 = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2 - 4}}, \text{ б) } F_2 = \sqrt{(z^2 - 1)(z^2 - 4)}? \text{ Ответ обязательно обосновать.}$$

- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-2}^1 \frac{1}{(x^2 - x)^2} \sqrt{-\frac{x+1}{x+2}} dx$
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \sqrt[3]{1 - 7z^2} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{\sqrt{7}}, \operatorname{Im} z \leq 0 \right\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg\left(z + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{3\pi}{4} \right\}$, причем $g(0) = 1$. Вычислить

$$\oint_{|z+4+i|=5} \frac{dz}{g^2(z) - g(z) - 12}$$

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{(z-3)^2}{(z-i)^3}$.
- b. Найти число корней уравнения $3z^4 + \operatorname{ch} iz = 0$ в круге $|z| < \frac{1}{2}$.
- c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $1 + ze^{\lambda+z} = 0$ имеет в круге $\{z : |z| \leq 1\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

16. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z}{\cos \frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2+1} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-i|=2} \frac{z^2 \operatorname{sh} \frac{1}{z}}{1 + \operatorname{ch} \frac{1}{z}} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\cos \varphi + 2)^2}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-6)\sin(2-5x)}{x^2 - 4x + 8} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$ допускает многозначная функция $\operatorname{Ln} \frac{z-1}{z+1}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{2z^4 - 2z^2}$ в \mathbb{C} с разрезом по отрезку $[-1; 1]$, такая, что $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}$. Вычислить $g(-\sqrt{2})$.
- c. Пусть $f(z)$ - регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}(z + iz^2)$ в плоскости с разрезами по положительной части действительной оси и по отрезку $[0; i]$ мнимой оси, выделяемая условием $\operatorname{Im} f\left(e^{-\frac{i\pi}{6}}\right) = 0$. Вычислить $f\left(1 + \frac{i}{2}\right)$. Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 1 + \frac{i}{2}$. Найти радиус сходимости. Вычислить сумму ряда при $z = e^{-\frac{i\pi}{6}}$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \sqrt[3]{\frac{z}{1-z}}$, б) $F_2 = \sqrt[3]{z(1-z)}$? Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}{x^2 + 4x + 4} dx$
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \operatorname{Ln} \frac{z^2 - 1}{17} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-1) = \frac{\pi}{4} \right\}$, причем $g(4i) = -\pi i$. Вычислить $\oint_{|z-5+5i|=6} \frac{dz}{g^2(z) - \pi i g(z) + 2\pi^2}$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_{-i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = z^4 + 2z^2 + 1$.
- b. Найти число нулей многочлена $z^3 - 2z - 5$ в области $D: 1 < |z| < 3$.
- c. Доказать, что уравнение $(2z+1)e^z = 2z+3$ не имеет решений с положительной действительной частью.

17. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z^2}{\sin \frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{\operatorname{ch}^2 z} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi + 1}{\sin \varphi + 2} d\varphi$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2}$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(6x-1)\sin(1-2x)}{4x^2 + 4x + 5} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ допускает многозначная функция $\sqrt{z^2 - 1}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{z^4 - 3z^2}$ в \mathbb{C} с разрезом по отрезку $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$, такая, что $g(2) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}$. Вычислить $g(-2)$ и $g'(-2)$.
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь $\sqrt{\frac{16z^2 + 1}{z^2}}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[0; \frac{i}{4}]$ и по дуге окружности $|z - \frac{1}{3}| = \frac{5}{12}$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, причем $g\left(\frac{1}{3}\right) = 5$. Разложить $g(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z = \infty$. Найти область сходимости полученного ряда и вычислить сумму ряда в точке $z = \frac{1}{3}$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \operatorname{Ln} \frac{z}{z-1}$, б) $F_2 = \operatorname{Ln} \frac{z^2}{z-1}$? Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x-1) \cdot \sqrt{x-1}}{x^2} dx$
- c. Пусть $f(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \operatorname{Ln} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \right\}$ в области $G = \{z \mid |z| > 1\}$ такая, что $f(\infty) = 0$. Доказать, что многозначная функция $\left\{ \sqrt{f(z) + 4i} \right\}$ распадается в G на регулярные ветви. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь функции $\left\{ \sqrt{f(z) + 4i} \right\}$ в G такая, что $g(\infty) = -\sqrt{2}(i+1)$. Вычислить интеграл $J = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{g(z)}$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_{-i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1}$.
- b. Определить число нулей многочлена $z^5 - 12z^2 + 14$ в кольце $1 < |z| < \frac{5}{2}$.
- c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $z = \lambda - e^{-z}$ имеет в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

18. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_{\infty} \frac{z}{e^z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{z}{\cos \frac{1}{z}} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-1|=1} \frac{e^{-iz}}{\cos^2 z} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 + \sin^2 \varphi}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(5 - 12x)\cos(2 - 6x)}{9x^2 + 6x + 10} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ допускает многозначная функция $\operatorname{Ln} \frac{z-1}{z+1}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{z^2 + 1}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-i) = \frac{3\pi}{4}\right\}$, причем $g(0) = 1$. Вычислить $g(3\sqrt{7})$.
- c. Пусть $h(z)$ - регулярная ветвь $\operatorname{Ln}\left(\frac{z^2 - 1}{z^2}\right)$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-1; 1]$, причем $\operatorname{Im} h\left(-\frac{i}{5}\right) = 0$. Разложить $h(z)$ в ряд Лорана по степеням $z + i$. Найти область сходимости полученного ряда и вычислить сумму ряда в точке $z = -\frac{i}{5}$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \operatorname{Ln}(z^2 + 1)$, б) $F_2 = \operatorname{Ln} \frac{z+i}{z-i}$? Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2 + 1)} dx$
- c. Пусть $f(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt{\frac{z-4}{z+4}}$ в области $G = \{z \mid |z| > 4\}$ такая, что $f(\infty) = -1$. Доказать, что многозначная функция $\{\operatorname{Ln}(f(z)-1)\}$ распадается в G на регулярные ветви. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь функции $\{\operatorname{Ln}(f(z)-1)\}$ в G такая, что $g(\infty) = \ln 2 + i\pi$. Вычислить интеграл $J = \oint_{|z|=5} \frac{dz}{g(z)}$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = z^5 + z^3$.
- b. Найти число корней уравнения $z^4 + 4z + \cos z = 0$ в круге $|z| < 1$.
- c. Доказать, что уравнение $z \sin z = 1$ имеет только действительные корни.

19. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_{\infty} z e^{\frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-3i|=1} \frac{(z+i)^2}{\operatorname{sh}^2 z} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{5 + 3 \cos \varphi} d\varphi$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(20x+3)\sin(1-12x)}{16x^2 + 16x + 5} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{[0, 1]\}$ допускает многозначная функция $\sqrt[3]{z(z-1)}$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \operatorname{Ln} \frac{z^2 + 1}{26} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1, \operatorname{Re} z \leq 0\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-i) = \frac{\pi}{4} \right\}$, причем $g(5) = 0$. Вычислить $g(3\sqrt{3}i)$.
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь $\sqrt{\frac{9z^2 - 1}{z^2}}$ в плоскости с разрезом по отрезку $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ и по дуге окружности $\left|z - \frac{i}{4}\right| = \frac{5}{12}$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, причем $g\left(\frac{i}{2}\right) = \sqrt{13}$. Разложить $g(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z = \infty$. Найти область сходимости полученного ряда и вычислить сумму ряда в точке $z = \frac{i}{2}$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли в области $U = \mathbb{C} \setminus [-2i, 2i]$ выделить регулярные ветви многозначных функций а) $F_1 = \operatorname{Ln}(z(z^2 + 4))$, б) $F_2 = \operatorname{Ln} \frac{z}{z^2 + 4}$? Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^1 \frac{\ln(1-x) \cdot \sqrt{1-x}}{x^2 - 4x + 4} dx$
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{ \sqrt[4]{2z^4 - 2z^2} \right\}$ в \mathbb{C} с разрезом по отрезку $[-1; 1]$, такая, что $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}$. Вычислить $\oint_{|z|=\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{1}{z} g(z) + iz dz$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{1}{z^5 + z^3}$.
- b. Найти число нулей многочлена $z^3 - 2z - 5$ в области $D: |z| < 1$.
- c. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $\{z: |z| < 1\}$. Доказать, что существует такое число $\rho > 0$, что для всех w из круга $\{w: |w| < 1\}$ уравнение $z = wf(z)$ имеет в круге $\{z: |z| < 1\}$ ровно один корень.

20. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание

1. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_{\infty} \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin \frac{1}{z} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z+5|=1} \frac{i + \operatorname{sh} z}{1 - \cos z} dz$.

2. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2 + 3 \cos^2 \varphi)^2}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^3}$.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(15 - 2x) \cos(2 - 10x)}{25x^2 - 20x + 8} dx$.

3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Выяснить сколько различных регулярных ветвей в области $U = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ допускает многозначная функция $\operatorname{Ln}(z^2 - 1)$.
- b. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{1 - 7z^2}$ в \mathbb{C} с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{\sqrt{7}}, \operatorname{Im} z \leq 0 \right\}$, $\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg\left(z + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{3\pi}{4} \right\}$, причем $g(0) = 1$. Вычислить $g(-2)$, $g'(-2)$.
- c. Пусть $h(z)$ - регулярная ветвь $\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z^2}{z^2}\right)$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-i; i]$, причем $\operatorname{Im} h\left(\frac{1}{5}\right) = 0$. Разложить $h(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - 1$. Найти область сходимости полученного ряда и вычислить сумму ряда в точке $z = \frac{1}{5}$.

4. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

- a. Можно ли выделить регулярные ветви многозначной функции $F(z) = \sqrt[5]{(z^2 - 1)^2}$ в области $U = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Ответ обязательно обосновать.
- b. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{-2} \frac{\ln(-2-x)}{\sqrt{-2-x}(x^2+x)} dx$.
- c. Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{z^4 - 3z^2}$ в \mathbb{C} с разрезом по отрезку $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$, такая, что $g(2) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}$. Вычислить $\oint_{|z|=\frac{9}{5}} \frac{z^2 + z + 1}{z(g(z) + i\sqrt{2})} dz$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_1 \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = (z-1)^5(z-5)$.
- b. Найти число корней уравнения $z^8 + 5z^7 - z^4 + 2 = 0$ в кольце $4 < |z| < 6$.
- c. Определить число корней многочлена $P_5(z) = z^5 - 12z^2 + 14$ в левой полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.