

1. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Разложить функцию $f(z) = \cos z$ по степеням z в ряд Лорана а) в кольце $\{0 < |z| < 1\}$, б) в кольце $\{1 < |z| < +\infty\}$.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = -\frac{5}{2}$:

$$f(z) = \frac{i}{iz^2 + 5z - 6i} - \frac{z(1+i)}{z^2 + 2(1-i)z - 4i}. \text{ Указать границы кольца сходимости/}$$

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Указать тип особой точки $z = 0$ для функции $\frac{1}{\sin^k z}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.
- b. Исследовать особые точки функции: $f(z) = \frac{e^{\operatorname{tg}(z)} \operatorname{ctg}(z)}{\operatorname{ctg}(2z)}$. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z}{\cos z}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{z}{\cos z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^4 - 1}$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z+2i}{z+i} \cos \frac{2}{z} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 + \cos \varphi}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos(3-5x)}{x^2 + 2x + 17} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_1 \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = (z-1)^5(z-5)$.
- b. Найти число корней уравнения $z^8 + 5z^7 - z^4 + 2 = 0$ в кольце $4 < |z| < 6$.
- c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $ze^{\lambda-z} = 1$ имеет в круге $\{z : |z| \leq 1\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

2. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Разложить функцию $f(z) = e^z$ по степеням z в ряд Лорана а) в кольце $\{0 < |z| < 1\}$, б) в кольце $\{1 < |z| < +\infty\}$.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 5$:

$$f(z) = \frac{i-2-iz}{z^2 + (i-2)z - 2i} + \frac{4i-3-iz}{iz^2 + 2z + 3i}. \text{ Указать границы кольца сходимости.}$$

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Найти и исследовать все особые точки функции $f(z) = \frac{z^2 + 1}{\sin(\pi iz)}$ (если есть полюса, то указать их порядок).

- b. Исследовать особые точки функции: $f(z) = \frac{(\pi z - 1)^2 e^{\frac{1}{z}}}{\left(1 + \cos \frac{1}{z}\right)^2}$. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z}{\sin z}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{z}{\sin z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.

- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin 3z}{(z-1)^2} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.

- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{z+i} \cos \frac{2i}{z} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi + 3}$.

- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$.

- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\sin(1-4x)}{x^2 - 2x + 26} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_1 \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{z-5}{(z-1)^5}$.

- b. Найти число нулей многочлена $z^3 - 2z - 5$ в области $D: |z| < 1$.

- c. Определить число корней многочлена $P_5(z) = z^5 - 12z^2 + 14$ в правой полуплоскости $\{z: \operatorname{Re} z > 0\}$.



3. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

a. Выписать все возможные разложения функции $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$ в ряд Лорана по степеням z . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.

b. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = \frac{5}{2}$:

$$f(z) = \frac{2z - 4i}{iz^2 + 4z - 4i} + \frac{z(i-1) - i}{z^2 - z(3+2i)z + 6i}. \text{ Указать границы кольца сходимости.}$$

2. Особые точки однозначного характера.

a. Указать тип особой точки $z = \frac{\pi}{2}$ для функции $e^{\operatorname{tg} z}$.

b. Исследовать особые точки функции: $f(z) = \frac{\operatorname{tg}(z)e^{\operatorname{ctg}(z)}}{\operatorname{tg}(2z)}$. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{1}{\operatorname{sh} z}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{1}{\operatorname{sh} z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.

b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \sin\left(\frac{z+1}{z}\right) dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.

c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^2}{z-i} \sin \frac{i}{z} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4 \cos \varphi}$.

b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$

c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos(2-3x)}{x^2 - 2x + 10} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

a. Найти $\operatorname{res}_{2i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = (z-2i)^4(z+4)$.

b. Найти число корней уравнения $z^4 + 4z + \cos z = 0$ в круге $|z| < 1$.

c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $z + \lambda - e^z = 0$ имеет в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

4. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

a. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{1+z}$ по степеням z в ряд Лорана а) в кольце $\{0 < |z| < 1\}$, б) в кольце $\{1 < |z| < +\infty\}$.

b. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = \frac{5i}{2}$:

$$f(z) = \frac{z(i-3) - 4 - 6i}{z^2 + 6iz - 8} + \frac{2z - 4i - 9}{z^2 + z(4i-3) - 12i}. \text{ Указать границы кольца сходимости.}$$

2. Особые точки однозначного характера.

a. Найти и исследовать все особые точки функции $f(z) = \frac{z^2 + \pi^2}{z^2(e^z + 1)}$ (если есть полюса, то указать их порядок).

b. Исследовать особые точки функции: $f(z) = \frac{(2 - \pi)^3 e^{\frac{1}{z^2}}}{\left(1 - \sin \frac{1}{z}\right)^3}$. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{shz}{z^6}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{shz}{z^6}$. Если невозможно, то объяснить, почему.

b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z-1)^2} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.

c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{z}{z-2i} e^{\frac{2i}{z}} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\cos \varphi + 2)^2}$.

b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2}$

c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos(2-3x)}{x^2 - 2x + 10} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

a. Найти $\operatorname{res}_{2i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{z-4}{(z-2i)^4}$.

b. Определить число нулей многочлена $z^5 - 12z^2 + 14$ в кольце $1 < |z| < \frac{5}{2}$.

c. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $\{z : |z| < 1\}$ и $|f(z)| < 1$ на окружности $\{z : |z| = 1\}$. Доказать, что внутри единичного круга существует точка z_0 такая, что $f(z_0) = z_0$.

5. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Разложить функцию $f(z) = \sin z$ по степеням z в ряд Лорана а) в кольце $\{0 < |z| < 1\}$, б) в кольце $\{1 < |z| < +\infty\}$.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z + 1 - i)$ функцию $f(z) = \frac{2z - i}{(z + i)^2} - \frac{5z - 4 + 3i}{z^2 + z(i - 2) - 2i}$ в кольце, которому принадлежит точка $z = \frac{3}{2}$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Найти и исследовать все особые точки функции $f(z) = \frac{z - \pi}{\sin 2z - 2 \sin z}$ (если есть полюса, то указать их порядок).
- b. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{\cos^3\left(\frac{14\pi}{3iz - z^2}\right)}{\left(i + \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2}\right)^2}$, определить их тип. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0\left(z^5 \cos \frac{1}{z}\right)$ и $\operatorname{res}_\infty\left(z^5 \cos \frac{1}{z}\right)$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2 + 1} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=3} \frac{(z - 2)^3}{z - 4} \sin\left(\frac{1}{2 - z}\right) dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi + 1}{\sin \varphi + 2} d\varphi$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - 2)\cos(3 - x)}{x^2 - 2x + 2} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{(z - i)^3}{(z - 3)^2}$.
- b. Найти число нулей многочлена $z^3 - 2z - 5$ в области $D: 1 < |z| < 3$.
- c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $1 + ze^{\lambda+z} = 0$ имеет в круге $\{z: |z| \leq 1\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

6. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Выписать все возможные разложения функции $f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$ в ряд Лорана по степеням $(z+1)$. Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z+1)$ функцию $f(z) = \frac{-4-2i}{(z+1+2i)(z-3)}$ в кольце, которому принадлежит точка $z = -1 - 5i$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Найти и исследовать все особые точки функции $f(z) = \frac{z^2 + \pi^2}{\operatorname{ch} z + 1}$ (если есть полюса, то указать их порядок).
- b. Исследовать особые точки функции $f(z) = \frac{e^{\sin z}}{\cos \frac{1}{z}}$. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z}{\cos \frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{z^3 \cdot e^{\frac{1}{z-1}}}{1+z} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 + \sin^2 \varphi}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)\sin(2-x)}{x^2 - 2x + 2} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{(z-3)^2}{(z-i)^3}$.
- b. Найти число корней уравнения $3z^4 + \operatorname{ch} iz = 0$ в круге $|z| < \frac{1}{2}$.
- c. Доказать, что уравнение $(2z+1)e^z = 2z+3$ не имеет решений с положительной действительной частью.

7. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Выписать все возможные разложения функции $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)}$ в ряд Лорана по степеням z . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-i)$ функцию $f(z) = \frac{3z}{z^2 - 2iz + 8} + \frac{4i}{z^2 + 4}$ в кольце, которому принадлежит точка $z = 1$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Указать тип особой точки $z = 0$ для функции $\frac{z}{\cos z - 1}$.
- b. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{z \cdot e^{\frac{1}{\sin z}}}{(2z + \pi) \sin z \cdot \cos 2z}$, определить их тип. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z^2}{\sin \frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{z}{\cos \frac{1}{z}} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=3/2} \frac{z-i}{z+2i} \sin\left(\frac{z+i}{z-i}\right) dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{5 + 3 \cos \varphi} d\varphi$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^3}$.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \cos(3-x)}{x^2 - 4x + 5} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_{-i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = z^4 + 2z^2 + 1$.
- b. Найти число корней уравнения $z^8 + 5z^7 - z^4 + 2 = 0$ в круге $|z| < 1$.
- c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $z = \lambda - e^{-z}$ имеет в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

8. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Выписать **все** возможные разложения функции $f(z) = z^5 \sin \frac{1}{z}$ в ряд Лорана по целым степеням z . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1-i)$ функцию $f(z) = \frac{i}{z^2 + (6-i)z + 9-3i} + \frac{2z}{z^2-9}$ в кольце, которому принадлежит точка $z = -2$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Найти и исследовать все особые точки функции $f(z) = \frac{1 - \cos z}{1 - e^{2iz}}$ (если есть полюса, то указать их порядок).
- b. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z \cdot e^{\operatorname{tg} z}}{\operatorname{tg} 4z}$, определить их тип. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_{\infty} \frac{z}{e^z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z+1|=1/2} \frac{z^3 + z}{z-1} \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{1}{z+1} \right) dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2 + 3 \cos^2 \varphi)^2}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+3) \sin(1-x)}{x^2 - 4x + 5} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_{-i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1}$.
- b. Определить число нулей многочлена $z^5 - 12z^2 + 14$ в кольце $1 < |z| < 2$.
- c. Доказать, что уравнение $z \sin z = 1$ имеет только действительные корни.

9. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

a. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ по степеням z в ряд Лорана а) в кольце $\{0 < |z| < 1\}$, б) в кольце $\{1 < |z| < +\infty\}$.

b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1+i)$ функцию $f(z) = \frac{4i}{z^2 + 2iz + 3} + \frac{z-3i}{z^2 + 1}$ в кольце, которому принадлежит точка $z=0$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

a. Указать тип особой точки $z = -\frac{\pi}{2}$ для функции $e^{\operatorname{tg} z}$.

b. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{(2z-\pi) \cdot e^{\frac{1}{\cos z}}}{z \cdot \cos 2z \cdot \cos z}$, определить их тип. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_{z=0} z e^z$. Если невозможно, то объяснить, почему.

b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin \frac{1}{z} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.

c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{(z-1)^3 \sin \frac{1}{z-1}}{(z+1)^2} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(4-3\sin^2 \varphi)^2}$.

b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$

c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+2)\cos(2-2x)}{x^2+4x+5} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = z^5 + z^3$.

b. Найти число корней уравнения $z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0$ в круге $|z| < 1$.

c. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $\{z : |z| < 1\}$. Доказать, что существует такое число $\rho > 0$, что для всех w из круга $\{w : |w| < 1\}$ уравнение $z = wf(z)$ имеет в круге $\{z : |z| < 1\}$ ровно один корень.

10. ТФКП

3 курс 5 семестр

2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Разложить функцию $f(z) = \operatorname{sh} z$ по степеням z в ряд Лорана а) в кольце $\{0 < |z| < 1\}$, б) в кольце $\{1 < |z| < +\infty\}$.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1)$ функцию $f(z) = \frac{1}{z^2 + (i-4)z + 4 - 2i} + \frac{2iz}{z^2 - 4}$ в кольце, которому принадлежит точка $z = 2i$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Найти и исследовать все особые точки функции $f(z) = \frac{1}{1 - \cos z} - \frac{1}{z}$ (если есть полюса, то указать их порядок).
- b. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z \cdot e^{\operatorname{ctg} z}}{\operatorname{ctg} 4z}$, определить их тип. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_{\infty} \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=3} \frac{(z+1)^3 \sin \frac{1}{z}}{z-1} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{5 + 3 \cos \varphi} d\varphi$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{\infty} \frac{x^4}{(x^2 + 2)^4} dx$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin(1-x)}{x^2 + 2x + 2} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{1}{z^5 + z^3}$.
- b. Определить число нулей многочлена $z^5 - 12z^2 + 14$ в области $|z| > 2$.
- c. Определить число корней многочлена $P_5(z) = z^5 - 12z^2 + 14$ в левой полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.

11. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

a. Выписать все возможные разложения функции $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ в ряд Лорана по степеням z . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.

b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-2-i)$ функцию $f(z) = \frac{z^2 - 2iz + 6}{z^2(z+3i)}$ в кольце, которому принадлежит точка

$z = 5 + i$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

a. Указать тип особой точки $z = 0$ для функции $e^{\operatorname{ctg} z}$.

b. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{z^2 \sin^2 z \cdot \sin\left(\frac{1}{z - \frac{\pi}{2}}\right)}{(\cos z - 1)^2} e^{\sin z/z}$, определить их тип. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z}{\cos z}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{z}{\cos z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.

b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.

c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=3} \frac{(z-1)^2 e^{\left(\frac{1}{z-1}\right)}}{z+1} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(4 - 3 \sin^2 \varphi)^2}$.

b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\cos(1-x)}{x^2 - 4x + 5} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

a. Найти $\operatorname{res}_1 \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{z-5}{(z-1)^5}$.

b. Определить число нулей многочлена $z^5 - 12z^2 + 14$ в области $|z| > 2$.

c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $ze^{\lambda-z} = 1$ имеет в круге $\{z : |z| \leq 1\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

12. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Выписать все возможные разложения функции $f(z) = \frac{1}{z}$ в ряд Лорана по степеням $(z-1)$. Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z + 3 + 5i)$ функцию $f(z) = \frac{16 - z^2}{z(z + 4i)^2}$ в кольце, которому принадлежит точка $z = -1 - i$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Найти и исследовать все особые точки функции $f(z) = \frac{1}{\cos z - 2}$ (если есть полюса, то указать их порядок).
- b. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3 \cos z \cdot \cos\left(\frac{1}{z - \pi}\right) e^{\cos z / \left(z - \frac{\pi}{2}\right)}}{(\sin z - 1)^2}$, определить их тип. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z}{\sin z}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{z}{\sin z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^4 - 1}$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{(z+1)^2 e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{5 + 3 \cos \varphi} d\varphi$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^\infty \frac{(x-1)\sin(2-x)}{x^2 - 2x + 2} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_{2i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = (z - 2i)^4 (z + 4)$.
- b. Найти число корней уравнения $z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0$ в круге $|z| < 1$.
- c. Определить число корней многочлена $P_5(z) = z^5 - 12z^2 + 14$ в правой полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$.

.....

13. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Выписать **все** возможные разложения функции $f(z) = \frac{1}{z^5} \cos z$ в ряд Лорана по целым степеням z . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z - 1 - 3i)$ функцию $f(z) = \frac{z^2 - 4}{z(z - 2i)^2}$ в кольце, которому принадлежит точка $z = 1$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Указать тип особой точки $z = \infty$ для функции $\frac{1}{\cos z}$.
- b. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{z \sin^3 z \cdot \cos\left(\frac{1}{1-z}\right)}{(\cos z - 1)^2} e^{\sin^2 \frac{z}{z^2}}$, определить их тип. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{1}{\operatorname{sh} z}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{1}{\operatorname{sh} z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin 3z}{(z-1)^2} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{\sin \frac{1}{z}}{1 - \cos \frac{1}{z}} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 + \cos \varphi}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^\infty \frac{x^4}{(x^2 + 2)^4} dx$.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^\infty \frac{(x-3)\cos(7-6x)}{x^2 + 2x + 5} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_{2i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{z-4}{(z-2i)^4}$.
- b. Определить число нулей многочлена $z^5 - 12z^2 + 14$ в кольце $1 < |z| < 2$.
- c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $z + \lambda - e^z = 0$ имеет в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

14. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Разложить функцию $f(z) = \cos z$ по степеням z в ряд Лорана а) в кольце $\{0 < |z| < 1\}$, б) в кольце $\{1 < |z| < +\infty\}$.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z + 2 + 2i)$ функцию $f(z) = \frac{2z^2 + iz + 5}{z^2(z - 5i)}$ в кольце, которому принадлежит точка $z = 1 + i$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Найти и исследовать все особые точки функции $f(z) = \frac{z - \pi}{\sin 2z - 2 \sin z}$ (если есть полюса, то указать их порядок).

- b. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 z \cdot \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)}{(\sin z - 1)^2} e^{\cos^2 z / \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}$, определить их тип. Ответ обосновать

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{shz}{z^6}$ и $\operatorname{res}_\infty \frac{shz}{z^6}$. Если невозможно, то объяснить, почему.

- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \sin\left(\frac{z+1}{z}\right) dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.

- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} \frac{1}{z}}{i - \operatorname{sh} \frac{1}{z}} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi + 3}$.

- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$

- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+7)\sin(5-3x)}{x^2 + 2x + 2} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{(z-i)^3}{(z-3)^2}$.

- b. Найти число корней уравнения $z^8 + 5z^7 - z^4 + 2 = 0$ в круге $|z| < 1$.

- c. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $\{z : |z| < 1\}$ и $|f(z)| < 1$ на окружности $\{z : |z| = 1\}$. Доказать, что внутри единичного круга существует точка z_0 такая, что $f(z_0) = z_0$.

15. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Разложить функцию $f(z) = e^z$ по степеням z в ряд Лорана а) в кольце $\{0 < |z| < 1\}$, б) в кольце $\{1 < |z| < +\infty\}$.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z+i)$ функцию $f(z) = \frac{(i-2)z-2}{2iz^2 - (6+i)z + 3}$ в кольце, которому принадлежит точка $z = i - 1$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z+i)$ функцию $f(z) = \frac{(i-2)z-2}{2iz^2 - (6+i)z + 3}$ в кольце, которому принадлежит точка $z = i - 1$. Указать границы кольца сходимости.
- b. Исследовать особые точки функции $f(z) = \frac{z^2 + \pi^2}{shz} \left(\exp\left(\frac{\pi}{2z}\right) - e \right) tgz$. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $res_0 \left(z^5 \cos \frac{1}{z} \right)$ и $res_\infty \left(z^5 \cos \frac{1}{z} \right)$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z-1)^2} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{z \cos \frac{1}{z}}{1 + \sin \frac{1}{z}} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4 \cos \varphi}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2+x) \cos(3-7x)}{x^2 - 4x + 5} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $res_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{(z-3)^2}{(z-i)^3}$.
- b. Найти число корней уравнения $3z^4 + ch iz = 0$ в круге $|z| < \frac{1}{2}$.
- c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $1 + ze^{\lambda+z} = 0$ имеет в круге $\{z : |z| \leq 1\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

16. ТФКП

3 курс 5 семестр

2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Выписать все возможные разложения функции $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$ в ряд Лорана по степеням z . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z+1-i)$ функцию $f(z) = \frac{(1+3i)z+i}{3z^2+(6i-1)z-2i}$ в кольце, которому принадлежит точка $z = 4i - 1$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Найти и исследовать все особые точки функции $f(z) = \frac{z^2+1}{\sin(\pi iz)}$ (если есть полюса, то указать их порядок).
- b. Исследовать особые точки функции $f(z) = \frac{4z^2+9\pi^2}{chz} \left(\exp\left(\frac{z}{z-1}\right) - 1 \right) ctgz$. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $res_0 \frac{z}{\cos \frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2+1} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-i|=2} \frac{z^2 \operatorname{sh} \frac{1}{z}}{1 + \operatorname{ch} \frac{1}{z}} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\cos \varphi + 2)^2}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-6)\sin(2-5x)}{x^2 - 4x + 8} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $res_{-i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = z^4 + 2z^2 + 1$.
- b. Найти число нулей многочлена $z^3 - 2z - 5$ в области $D: 1 < |z| < 3$.
- c. Доказать, что уравнение $(2z+1)e^z = 2z+3$ не имеет решений с положительной действительной частью.

17. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

a. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{1+z}$ по степеням z в ряд Лорана а) в кольце $\{0 < |z| < 1\}$, б) в кольце $\{1 < |z| < +\infty\}$.

b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1+i)$ функцию $f(z) = \frac{(2+2i)z+5}{2z^2+(4-i)z-2i}$ в кольце, которому

принадлежит точка $z = 3 + 2i$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

a. Указать тип особой точки $z = -\frac{\pi}{2}$ для функции $e^{\operatorname{tg} z}$.

b. Исследовать особые точки функции $f(z) = \frac{z^2 + \pi^2}{\operatorname{sh} 2z} \left(\exp\left(\frac{\pi}{z}\right) - e^2 \right) \operatorname{tg}^2 z$. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_0 \frac{z^2}{\sin \frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.

b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.

c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{\operatorname{ch}^2 z} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi + 1}{\sin \varphi + 2} d\varphi$.

b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2}$

c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(6x-1)\sin(1-2x)}{4x^2+4x+5} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

a. Найти $\operatorname{res}_{-i} \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1}$.

b. Определить число нулей многочлена $z^5 - 12z^2 + 14$ в кольце $1 < |z| < \frac{5}{2}$.

c. Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $z = \lambda - e^{-z}$ имеет в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

18. ТФКП

3 курс 5 семестр

2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Разложить функцию $f(z) = \sin z$ по степеням z в ряд Лорана а) в кольце $\{0 < |z| < 1\}$, б) в кольце $\{1 < |z| < +\infty\}$.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z + 2 - i)$ функцию $f(z) = \frac{(i-3)z + 4i}{3iz^2 + (1+9i)z + 3}$ в кольце, которому принадлежит точка $z = i$. Указать границы кольца сходимости. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Найти и исследовать все особые точки функции $f(z) = \frac{z^2 + \pi^2}{z^2(e^z + 1)}$ (если есть полюса, то указать их порядок).
- b. Исследовать особые точки функции $f(z) = \frac{4z^2 + \pi^2}{ch3z} \left(\exp\left(\frac{z}{z-2}\right) - 1 \right) ctg^2 z$. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $res_{\infty} \frac{z}{e^z}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=2} \frac{z}{\cos \frac{1}{z}} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-1|=1} \frac{e^{-iz}}{\cos^2 z} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1 + \sin^2 \varphi}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(5-12x)\cos(2-6x)}{9x^2 + 6x + 10} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $res_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = z^5 + z^3$.
- b. Найти число корней уравнения $z^4 + 4z + \cos z = 0$ в круге $|z| < 1$.
- c. Доказать, что уравнение $z \sin z = 1$ имеет только действительные корни.

19. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Выписать все возможные разложения функции $f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$ в ряд Лорана по степеням $(z+1)$. Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-3)$ функцию $f(z) = \frac{2z+i}{(z+2i)^2} + \frac{z+8+6i}{z^2+2z(i-2)-8i}$ в кольце, которому принадлежит точка $z=0$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Найти и исследовать все особые точки функции $f(z) = \frac{z^2 + \pi^2}{z^2(e^z + 1)}$ (если есть полюса, то указать их порядок).
- b. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{iz - z^2}\right)}{\left(e^{\frac{2\pi}{z}} - 1\right)^3}$, определить их тип. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_{\infty} z e^{\frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-3i|=1} \frac{(z+i)^2}{\operatorname{sh}^2 z} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{5 + 3 \cos \varphi} d\varphi$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(20x+3)\sin(1-12x)}{16x^2 + 16x + 5} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_i \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = \frac{1}{z^5 + z^3}$.
- b. Найти число нулей многочлена $z^3 - 2z - 5$ в области $D: |z| < 1$.
- c. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $\{z: |z| < 1\}$. Доказать, что существует такое число $\rho > 0$, что для всех w из круга $\{w: |w| < 1\}$ уравнение $z = wf(z)$ имеет в круге $\{z: |z| < 1\}$ ровно один корень.

20. ТФКП 3 курс 5 семестр 2 задание



1. Ряд Лорана.

- a. Выписать все возможные разложения функции $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)}$ в ряд Лорана по степеням z . Указать границы каждого из полученных колец сходимости. Для каждого из разложений указать, где в нем главная, а где правильная часть.
- b. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1-i)$ функцию $f(z) = \frac{z+2}{(z-1)^2} - \frac{i+z(1-4i)}{z^2 - z(1+3i) + 3i}$ в кольце, которому принадлежит точка $z=0$. Указать границы кольца сходимости.

2. Особые точки однозначного характера.

- a. Найти и исследовать все особые точки функции $f(z) = \frac{z^2 + \pi^2}{\operatorname{ch} z + 1}$ (если есть полюса, то указать их порядок).
- b. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{\operatorname{sh}^3\left(\frac{6\pi}{z+iz^2}\right)}{(1-\operatorname{ch} 2\pi z)^2}$, определить их тип. Ответ обосновать.

3. Вычеты и вычисление интегралов.

- a. Вычислить (если это возможно) $\operatorname{res}_{\infty} \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$. Если невозможно, то объяснить, почему.
- b. Вычислить (если это возможно) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin \frac{1}{z} dz$ (ориентация контура – против часовой стрелки). Если невозможно, то объяснить, почему.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z+5|=1} \frac{i + \operatorname{sh} z}{1 - \cos z} dz$.

4. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

- a. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2 + 3 \cos^2 \varphi)^2}$.
- b. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^3}$.
- c. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(15 - 2x) \cos(2 - 10x)}{25x^2 - 20x + 8} dx$.

5. Принцип аргумента. Теорема Руше.

- a. Найти $\operatorname{res}_1 \frac{f'(z)}{f(z)}$, если $f(z) = (z-1)^5(z-5)$.
- b. Найти число корней уравнения $z^8 + 5z^7 - z^4 + 2 = 0$ в кольце $4 < |z| < 6$.
- c. Определить число корней многочлена $P_5(z) = z^5 - 12z^2 + 14$ в левой полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.