1. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_0(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \ t > 0, \ r < 1, \\ u\big|_{r=1} = 0, \ u\big|_{t=0} = r^2 \sin\varphi, \ u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Найти решение смешанной задачи $u_t = 2\Delta u + J_1\left(2\mu_5^{(1)} r\right)\cos\varphi \cos t$, $r < \frac{1}{2}$, $t > 0$, $u = u(r, \varphi, t)$; $u\big|_{t=0} = f(r)(4\cos\varphi - 3)$, $u\big|_{r=\frac{1}{2}} = 0$, $\left|u\big|_{r=0}\right| < \infty$, где $f(r)$ – гладкая на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ – j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $j = 1, 2, 3, \ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

2. Интегральные уравнения.

1. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано $K^*(x, y) = x - y^3 x \ \ (x, \ y \in \mathbb{R})$. Выписать $K(x, y)$.
3. Решить при всех допустимых значениях λ уравнение $\varphi(x) = 2\lambda \int_0^{\pi/3} (\cos 3x \cos 6y - 2\sin 3x \sin 6y)\varphi(y)dy$ $-3\cos 9x + 2\sin 9x$. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора.

---

2. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_1(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} 4u_{tt} = \Delta u, \ t > 0, \ r < 1, \\ u\big|_{r=1} = 0, \ u\big|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)} r\right), \ u_t\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Найти решение смешанной задачи $u_{tt} = \Delta u + J_2\left(\mu_4^{(2)} r\right)\cos 2\varphi \cos\left(\mu_4^{(2)} t\right)$, $r < 1$, $t > 0$, $u = u(r, \varphi, t)$; $u\big|_{t=0} = f(r)\sin\varphi$, $u_t\big|_{t=0} = J_2\left(\mu_4^{(2)} r\right)\cos 2\varphi$, $u\big|_{r=1} = 0$, $\left|u\big|_{r=0}\right| < \infty$, где $f(r)$ – гладкая на $[0, 1]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ – j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $j = 1, 2, 3, \ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

2. Интегральные уравнения.

1. Союзное уравнение.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано $K^*(x, y) = 1 \ \ \left(x, \ y \in [0, 1], \ x, \ y \in \mathbb{R}\right)$. Найти собственные функции и характеристические числа этого оператора.
3. Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α, при котором интегральное уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} \left(10|x|^2 - 6|x||y|\right)\varphi(y)dy + |x|^2 + \alpha|x|$, $|x| < 1$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ разрешимо для любых λ. Найти решения при этом значении α.

---

3. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_2(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_t = 4\Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0} = J_1\left(\mu_2^{(1)}\dfrac{r}{2}\right)\sin\varphi, \end{cases}$ $\mu_2^{(1)}$ - положительный ноль функции $J_1(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Найти решение смешанной задачи $u_t = 4\Delta u + J_2\left(\mu_3^{(2)}r\right)\sin 2\varphi \sin 2t$, $r<1$, $t>0$, $u=u(r,\varphi,t)$; $u\big|_{t=0} = f(r)(3\sin 2\varphi - 4)$, $u\big|_{r=1}=0$, $\left|u\big|_{r=0}\right| < \infty$, где $f(r)$ – гладкая на $[0,1]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ – j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k=0,1,2,\ldots$; $j=1,2,3,\ldots$; $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

2. Интегральные уравнения.

1. Характеристические числа и собственные функции.
2. Дано ядро $K(x,y)=-1$ $\left(x,\ y\in[0,1],\ x,\ y\in\mathbb{R}\right)$ интегрального оператора Фредгольма. Найти все решения однородного интегрального уравнения для этого оператора и выписать $K^*(x,y)$.
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ: $u(x) = \lambda\int\limits_1^2\left(\dfrac{4}{x^2y^2}-1\right)u(y)dy + 3x^2 - 4$, $u(x)\in C[1,2]$.

---

4. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_3(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)}\dfrac{r}{2}\right),\ u_t\big|_{t=0} = J_2\left(\mu_1^{(2)}\dfrac{r}{2}\right)\cos 2\varphi, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, $\mu_1^{(2)}$ - положительный ноль функции $J_2(x)$,записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Найти решение смешанной задачи $u_{tt} = \Delta u + J_1\left(2\mu_4^{(1)}r\right)\sin\varphi \sin\left(2\mu_4^{(1)}t\right)$, $r<\dfrac{1}{2}$, $t>0$, $u=u(r,\varphi,t)$; $u\big|_{t=0}=0$, $u_t\big|_{t=0} = f(r)\cos 2\varphi$, $u\big|_{r=\frac{1}{2}}=0$, $\left|u\big|_{r=0}\right|<\infty$, где $f(r)$ – гладкая на $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ – j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k=0,1,2,\ldots$; $j=1,2,3,\ldots$; $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

2. Интегральные уравнения.

1. Теоремы Фредгольма для уравнений с вырожденным ядром.
2. Дать определение характеристического числа и собственной функции интегрального оператора Фредгольма.
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ: $u(x) = \lambda\int\limits_0^1\left(2\sqrt{xy}-1\right)u(y)dy + 10x - 9$, $u(x)\in C[0,1]$.

---

5. УМФ   3курс 6 семестр   **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_4(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u,\ t>0,\ r<1, \\ u\big|_{r=1} = 0,\ u\big|_{t=0} = r^2\sin\varphi,\ u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = \Delta u + J_1(r)\sin\varphi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r < \mu_1^{(1)}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = J_1(r)\cos 2\varphi$, $r \le \mu_1^{(1)}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$; $u\big|_{r=\mu_1^{(1)}} = 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $t \ge 0$, где $\mu_1^{(1)}$ - минимальный положительный корень функции Бесселя $J_1(r)$.

2. Интегральные уравнения.

1. Уравнения с непрерывными и полярными ядрами.
2. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений.
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ: $u(x) = \lambda\int\limits_{1/2}^{1}\left(\frac{3x^2}{y^2} - 8\right)u(y)dy - 6x^2 + 7$, $u(x)\in C\left[\frac{1}{2},1\right]$.

✂ -

6. УМФ   3курс 6 семестр   **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_5(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} 4u_{tt} = \Delta u,\ t>0,\ r<1, \\ u\big|_{r=1} = 0,\ u\big|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)}r\right),\ u_t\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 4\Delta u - tJ_3(r)\cos 3\varphi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r < \mu_1^{(3)}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = \frac{1}{16}J_3(r)\cos 3\varphi + J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}}{\mu_1^{(3)}}r\right)\sin 2\varphi$, $r \le \mu_1^{(3)}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$; $u\big|_{r=\mu_1^{(3)}} = 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $t \ge 0$, где $\mu_1^{(2)} > 0$, $\mu_1^{(3)} > 0$ - корни функций Бесселя $J_2(r)$ и $J_3(r)$ соответственно.

2. Интегральные уравнения.

1. Уравнение с малым по норме оператором, ряд Неймана.
2. Выписать в общем виде однородное и неоднородное интегральное уравнения Фредгольма (и указать условия на гладкость всех входящих в них функций).
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ: $u(x) = \lambda\int\limits_{0}^{\ln 2}\left(\frac{2}{3}e^{3x-y} - 3e^{y}\right)u(y)dy + 4e^{3x} - 18$, $u(x)\in C[0,\ln 2]$.

✂ -

7. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_6(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_t = 4\Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0} = J_1\left(\mu_2^{(1)}\dfrac{r}{2}\right)\sin\varphi, \end{cases}$ $\mu_2^{(1)}$ - положительный ноль функции $J_1(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = \Delta u + J_1(r)\cos 2\varphi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r<\mu_1^{(1)}$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = J_1(r)\sin\varphi$, $r\le\mu_1^{(1)}$, $0\le\varphi\le 2\pi$; $u\big|_{r=\mu_1^{(1)}} = 0$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $t\ge 0$, где $\mu_1^{(1)}$ - минимальный положительный корень функции Бесселя $J_1(r)$.

2. Интегральные уравнения.

1. Резольвента и резольвентное ядро.
2. Сформулировать теорему Фредгольма, описывающую необходимые и достаточные условия для разрешимости неоднородного интегрального уравнения.
3. Решить интегральное уравнение: $u(x) = \lambda\int_{-1}^{1}\left(5x^2y^3 + 7x^3y^2\right)u(y)dy + 5x + 7x^4$, $u(x)\in C[-1,1]$, где λ – вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

✂ -

8. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_7(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)}\dfrac{r}{2}\right),\ u_t\big|_{t=0} = J_2\left(\mu_1^{(2)}\dfrac{r}{2}\right)\cos 2\varphi, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, $\mu_1^{(2)}$ - положительный ноль функции $J_2(x)$,записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 9\Delta u - tJ_2(r)\sin 2\varphi + J_4\left(\dfrac{\mu_1^{(4)}}{\mu_1^{(2)}}r\right)\cos 4\varphi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r<\mu_1^{(2)}$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = \dfrac{1}{81}J_2(r)\sin 2\varphi$, $r<\mu_1^{(2)}$, $0\le\varphi\le 2\pi$; $u\big|_{r=\mu_1^{(2)}} = 0$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $t\ge 0$, где $\mu_1^{(2)}>0$, $\mu_1^{(4)}>0$ - корни функций Бесселя $J_2(r)$ и $J_4(r)$ соответственно.

2. Интегральные уравнения.

1. Сведение уравнений с полярными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами.
2. Для интегрального уравнения Фредгольма $y(x) = \lambda\int_{-1}^{1}\left(xe^{x^2}\operatorname{sh}^4 t + \sin x\left(t^2 - t^4\right)\cos t\right)y(t)dt + f(x)$, $-1\le x\le 1$, $y\in L_2([-1,1])$, $f\in L_2([-1,1])$, $\lambda\in\mathbb{R}$ выписать сопряженное однородное уравнение.
3. Решить интегральное уравнение: $u(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left(x\sin y - \cos^2 y\right)u(y)dy + 3\sin x + \cos x$, $u(x)\in C[-\pi,\pi]$, где λ – вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

✂ -

9. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_8(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u,\ t>0,\ r<1, \\ u\big|_{r=1}=0,\ u\big|_{t=0}=r^2\sin\varphi,\ u_t\big|_{t=0}=0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 9\Delta u - 2u + J_2\left(\dfrac{\mu_3^{(2)}}{2}r\right)\cos 2\varphi$, $(t>0, r<2, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{t=0} = f(r)\cos\left(2\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $(r\le 2, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{r=2}=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $f(r)\in C^1[0,2]$, $f(2)=0$, $\mu_3^{(2)}$ - положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_2(\xi)$.

2. Интегральные уравнения.

1. Теоремы Фредгольма в общем случае.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано $K^*(x,y)=x-y^3x$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$. Выписать $K(x,y)$.
3. Решить интегральное уравнение: $u(x)=\lambda\int_{-1}^{1}\left(3xy^2+5x^2y\right)u(y)dy+5x^3-7x^4$, $u(x)\in C[-1,1]$, где λ – вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

---

10. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_9(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} 4u_{tt} = \Delta u,\ t>0,\ r<1, \\ u\big|_{r=1}=0,\ u\big|_{t=0}=J_0\left(\mu_1^{(0)}r\right),\ u_t\big|_{t=0}=0, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 4\Delta u - u + e^{-t}f(r)\sin\left(3\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $(t>0, r<5, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{t=0} = J_3\left(\dfrac{\mu_2^{(3)}}{5}r\right)\sin 3\varphi$, $(r\le 5, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{r=5}=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $f(r)\in C^1[0,5]$, $f(5)=0$, $\mu_2^{(3)}$ - положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_3(\xi)$.

2. Интегральные уравнения.

1. Уравнения с эрмитовыми ядрами.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано $K^*(x,y)=1$ $(x,\ y\in[0,1],\ x,\ y\in\mathbb{R})$. Найти собственные функции и характеристические числа этого оператора.
3. Решить интегральное уравнение: $u(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{3}{2}x\cos y+y\cos x\right)u(y)dy+x^2+2\pi\sin x$, $u(x)\in C[-\pi,\pi]$, где λ – вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

11. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{10}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_t = 4\Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0} = J_1\left(\mu_2^{(1)}\dfrac{r}{2}\right)\sin\varphi, \end{cases}$ $\mu_2^{(1)}$ - положительный ноль функции $J_1(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 9\Delta u - 2u + e^{-2t} J_1\left(\dfrac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)\sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $(t>0, r<2, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{t=0} = f(r)\sin\varphi$, $(r\le 2, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{r=2}=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $f(r)\in C^1[0,2]$, $f(2)=0$, $\mu_3^{(1)}$ - положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_2(\xi)$.

2. Интегральные уравнения.

1. Симметричность интегрального оператора с эрмитовым ядром.
2. Дано ядро $K(x,y) = -1$ $\left(x, y\in[0,1],\ x, y\in\mathbb{R}\right)$ интегрального оператора Фредгольма. Найти все решения однородного интегрального уравнения для этого оператора и выписать $K^*(x,y)$.
3. Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение $\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^{1}\left(xy^3 - x^2y^2\right)\varphi(y)dy + ax^2 + x^3$ и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

12. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{11}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)}\dfrac{r}{2}\right),\ u_t\big|_{t=0} = J_2\left(\mu_1^{(2)}\dfrac{r}{2}\right)\cos 2\varphi, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, $\mu_1^{(2)}$ - положительный ноль функции $J_2(x)$,записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 4\Delta u - 2u + f(r)\sin 5\varphi$, $(t>0, r<3, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{t=0} = J_5\left(\dfrac{\mu_1^{(5)}}{3} r\right)\sin\left(5\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $(r\le 3, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{r=3}=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $f(r)\in C^1[0,3]$, $f(3)=0$, $\mu_1^{(3)}$ - положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_5(\xi)$.

2. Интегральные уравнения.

1. Теорема о существовании характеристических чисел.
2. Дать определение характеристического числа и собственной функции интегрального оператора Фредгольма.
3. Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение $\varphi(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left(x\sin y + \cos y\cos x\right)\varphi(y)dy + ax$ $+\cos x$ и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

13. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{12}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \ t > 0, \ r < 1, \\ u\big|_{r=1} = 0, \ u\big|_{t=0} = r^2 \sin\varphi, \ u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 4\Delta u - u + J_2\left(\mu_3^{(2)} r\right)\cos 2\varphi$, $r < 1$, $t > 0$, $u = u(r,\varphi,t)$, $u\big|_{t=0} = f(r)(2\cos 2\varphi - 3)$, $u\big|_{r=1} = 0$, $\left|u\big|_{r=0}\right| < \infty$, где $f(r)$ – гладкая на [0,1] функция, $\mu_3^{(2)}$ - положительный нуль функции Бесселя J_2, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

2. Интегральные уравнения.

1. Теорема Гильберта-Шмидта для уравнений с непрерывными эрмитовыми ядрами.
2. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений.
3. Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(x^2 y^2 - xy\right)\varphi(y)dy + x^3 + a$ и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

✂ -

14. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{13}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} 4u_{tt} = \Delta u, \ t > 0, \ r < 1, \\ u\big|_{r=1} = 0, \ u\big|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)} r\right), \ u_t\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 9\Delta u - 2u + f(r)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$, $r < 2$, $t > 0$, $u = u(r,\varphi,t)$, $u\big|_{t=0} = f(r)\cos 3\varphi + 2J_1\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$, $u\big|_{r=2} = 0$, где $f(r)$ – гладкая на [0,2] функция, $\mu_3^{(1)}$ - положительный нуль функции Бесселя J_1, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

2. Интегральные уравнения.

1. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода.
2. Выписать в общем виде однородное и неоднородное интегральное уравнения Фредгольма (и указать условия на гладкость всех входящих в них функций).
3. Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(x^2 \cos y + y \sin x\right)\varphi(y)dy + \cos x + a\sin x$ и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

✂ -

15. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{14}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_t = 4\Delta u, \ t>0, \ r<2, \\ u\big|_{r=2} = 0, \ u\big|_{t=0} = J_1\left(\mu_2^{(1)} \dfrac{r}{2}\right)\sin\varphi, \end{cases}$ $\mu_2^{(1)}$ - положительный ноль функции $J_1(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 5\Delta u - 3u + J_3\left(\dfrac{1}{4}\mu_2^{(3)} r\right)\cos 3\varphi + f(r)\sin 2\varphi$, $r<4$, $t>0$, $u = u(r,\varphi,t)$, $u\big|_{t=0} = f(r)\cos 3\varphi$, $u\big|_{r=4} = 0$, $\left|u\big|_{r=0}\right| < \infty$, где $f(r)$ – гладкая на [0,4] функция, $\mu_2^{(3)}$ - положительный нуль функции Бесселя J_3, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

2. Интегральные уравнения.

1. Союзное уравнение.
2. Сформулировать теорему Фредгольма, описывающую необходимые и достаточные условия для разрешимости неоднородного интегрального уравнения.
3. Найти решение уравнения $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1}\left(\sin^3 x \cdot \dfrac{\operatorname{sh} y}{y} + x \operatorname{ch} x\left(y^2+2\right)e^{y^2}\right)\varphi(y)dy + f(x)$, $-1 \le x \le 1$. При каких $f(x) \in C([-1,1])$ и λ решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного оператора?

---

16. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{15}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \ t>0, \ r<2, \\ u\big|_{r=2} = 0, \ u\big|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)} \dfrac{r}{2}\right), \ u_t\big|_{t=0} = J_2\left(\mu_1^{(2)} \dfrac{r}{2}\right)\cos 2\varphi, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, $\mu_1^{(2)}$ - положительный ноль функции $J_2(x)$,записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 3\Delta u - 2u + f(r)\left(\cos\left(2\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin 3\varphi\right)$, $r<3$, $t>0$, $u = u(r,\varphi,t)$, $u\big|_{t=0} = 2J_3\left(\dfrac{\mu_2^{(3)}}{3} r\right)\sin 3\varphi$, $u\big|_{r=2} = 0$, $\left|u\big|_{r=0}\right| < \infty$, где $f(r)$ – гладкая на [0,3] функция, $\mu_2^{(3)}$ - положительный нуль функции Бесселя J_3, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

2. Интегральные уравнения.

1. Характеристические числа и собственные функции.
2. Для интегрального уравнения Фредгольма $y(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1}\left(x e^{x^2} \operatorname{sh}^4 t + \sin x\left(t^2 - t^4\right)\cos t\right)y(t)dt + f(x)$, $-1 \le x \le 1$, $y \in L_2([-1,1])$, $f \in L_2([-1,1])$, $\lambda \in \mathbb{R}$ выписать сопряженное однородное уравнение.
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях λ уравнение $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos y + x^3\right)\varphi(y)dy + 2\cos x$.

---

17. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{16}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \ t>0, \ r<1, \\ u\big|_{r=1} = 0, \ u\big|_{t=0} = r^2 \sin\varphi, \ u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ - гладкие функции на рассматриваемых отрезках, r, φ - полярные координаты: $u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin\varphi$, $r<4$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = g(r)\sin\varphi$, $u_t\big|_{t=0} = 0$, $u\big|_{r=4} = 0$.

2. Интегральные уравнения.

1. Теоремы Фредгольма для уравнений с вырожденным ядром.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано $K^*(x, y) = x - y^3 x \ \left(x, \ y \in \mathbb{R}\right)$. Выписать $K(x, y)$.
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях λ уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left(24x^3y^2 - 14x + 3\right)\varphi(y)dy$ - $12x^3 + 1$, $0 \le x \le 1$.

- -

18. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{17}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} 4u_{tt} = \Delta u, \ t>0, \ r<1, \\ u\big|_{r=1} = 0, \ u\big|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)} r\right), \ u_t\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ - гладкие функции на рассматриваемых отрезках, r, φ - полярные координаты: $u_{tt} = \Delta u + f(r)\cos^2\varphi$, $r<3$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = 0$, $u_t\big|_{t=0} = 0$, $r<3$; $u\big|_{r=3} = 0$, $t>0$.

2. Интегральные уравнения.

1. Уравнения с непрерывными и полярными ядрами.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано $K^*(x, y) = 1 \ \left(x, \ y \in [0, 1], \ x, \ y \in \mathbb{R}\right)$. Найти собственные функции и характеристические числа этого оператора.
3. Найти решение уравнения $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(xe^{x^2} \operatorname{sh}^4 y + \sin x\left(y^2 - y^4\right)\cos y\right)\varphi(y)dy + f(x)$, $-1 \le x \le 1$. При каких $f(x) \in C([-1,1])$ и λ решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного оператора?

19. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{18}\left(x\right)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_t = 4\Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0}=J_1\left(\mu_2^{(1)}\dfrac{r}{2}\right)\sin\varphi, \end{cases}$ $\mu_2^{(1)}$ - положительный ноль функции $J_1\left(x\right)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ - гладкие функции на рассматриваемых отрезках, $r,\ \varphi$ - полярные координаты: $4u_t = \Delta u - 8u + 4tf(r)\cos\varphi$, $r<6$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = 5J_3\left(\dfrac{\mu_k^{(3)}}{6}r\right)\cos 3\varphi$, $u\big|_{r=6}=0$, $\left|u\big|_{r=0}\right| < +\infty$, $\mu_k^{(3)}>0$, $J_3\left(\mu_k^{(3)}\right)=0$.

2. Интегральные уравнения.

1. Уравнение с малым по норме оператором, ряд Неймана.
2. Дано ядро $K(x,\ y) = -1$ $\left(x,\ y\in[0,\ 1],\ x,\ y\in\mathbb{R}\right)$ интегрального оператора Фредгольма. Найти все решения однородного интегрального уравнения для этого оператора и выписать $K^*(x,\ y)$.
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях λ уравнение $\varphi(x) = \lambda\int\limits_{-1}^{1}\left(\operatorname{sh}x + x^2y^2\right)\varphi(y)dy$ - 3.

✂ -

20. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{19}\left(x\right)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0}=J_0\left(\mu_1^{(0)}\dfrac{r}{2}\right),\ u_t\big|_{t=0}=J_2\left(\mu_1^{(2)}\dfrac{r}{2}\right)\cos 2\varphi, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0\left(x\right)$, $\mu_1^{(2)}$ - положительный ноль функции $J_2\left(x\right)$,записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ - гладкие функции на рассматриваемых отрезках, $r,\ \varphi$ - полярные координаты: $u_{tt} = 4\Delta u + f(r)\cos^2\varphi$, $r<3$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0$, $u\big|_{r=3}=0$, $\left|u\big|_{r=0}\right| < +\infty$.

2. Интегральные уравнения.

1. Резольвента и резольвентное ядро.
2. Дать определение характеристического числа и собственной функции интегрального оператора Фредгольма.
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях λ уравнение $\varphi(x) = \lambda\int\limits_{0}^{1}\left(3x^2 - 6xy + 1\right)\varphi(y)dy + 4x - 1,\ 0\le x\le 1$.

✂ -

21. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{20}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \ t > 0, \ r < 1, \\ u\big|_{r=1} = 0, \ u\big|_{t=0} = r^2 \sin\varphi, \ u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ - гладкие функции на рассматриваемых отрезках, r, φ - полярные координаты: $u_t = \frac{1}{9}\Delta u - 2u + e^{-t} f(r)\cos 4\varphi$, $u = u(r,\varphi,t)$, $r < 2$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = 2J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{2} r\right)\sin 2\varphi$, $u\big|_{r=2} = 0$, $\left|u\big|_{r=0}\right| < +\infty$, $\mu_k^{(2)} > 0$, $J_2\left(\mu_k^{(2)}\right) = 0$.

2. Интегральные уравнения.

1. Сведение уравнений с полярными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами.
2. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений.
3. Найти решение уравнения $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(x \operatorname{sh}^2 x \cdot \frac{\sin^3 y}{y} + \sin^3 x \cdot y^2 \operatorname{ch} y \right) \varphi(y) dy + f(x)$, $-1 \le x \le 1$. При каких $f(x) \in C([-1,1])$ и λ решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного оператора?

✂ -