

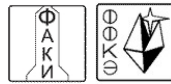
## 1. УМФ 3 курс 6 семестр 1 задание

### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_0(x)$ .
2. Решение задачи  $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & t > 0, r < 1, \\ u|_{r=1} = 0, u|_{t=0} = r^2 \sin \varphi, u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$  записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).
3. Найти решение смешанной задачи  $u_t = 2\Delta u + J_1(2\mu_5^{(1)}r)\cos\varphi\cos t, \quad r < \frac{1}{2}, \quad t > 0,$   
 $u = u(r, \varphi, t); \quad u|_{t=0} = f(r)(4\cos\varphi - 3), \quad u|_{r=\frac{1}{2}} = 0, \quad |u|_{r=0} < \infty,$  где  $f(r)$  – гладкая на  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  функция,  $\mu_j^{(k)}$  –  $j$ -й по порядку положительный нуль функции Бесселя  $J_k,$   
 $k = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, 3, \dots; \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$

### 2. Интегральные уравнения.

1. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано  $K^*(x, y) = x - y^3 x \quad (x, y \in \mathbb{R})$ . Выписать  $K(x, y)$ .
3. Решить при всех допустимых значениях  $\lambda$  уравнение  $\varphi(x) = 2\lambda \int_0^{\pi/3} (\cos 3x \cos 6y - 2 \sin 3x \sin 6y) \varphi(y) dy - 3 \cos 9x + 2 \sin 9x$ . Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора.



## 2. УМФ 3 курс 6 семестр 1 задание

### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_1(x)$ .
2. Решение задачи  $\begin{cases} 4u_{tt} = \Delta u, & t > 0, r < 1, \\ u|_{r=1} = 0, u|_{t=0} = J_0(\mu_1^{(0)}r), u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$   $\mu_1^{(0)}$  – положительный нуль функции  $J_0(x)$ , записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).
3. Найти решение смешанной задачи  $u_{tt} = \Delta u + J_2(\mu_4^{(2)}r)\cos 2\varphi\cos(\mu_4^{(2)}t), \quad r < 1, \quad t > 0,$   
 $u = u(r, \varphi, t); \quad u|_{t=0} = f(r)\sin\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_2(\mu_4^{(2)}r)\cos 2\varphi, \quad u|_{r=1} = 0, \quad |u|_{r=0} < \infty,$  где  $f(r)$  – гладкая на  $[0, 1]$  функция,  $\mu_j^{(k)}$  –  $j$ -й по порядку положительный нуль функции Бесселя  $J_k,$   
 $k = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, 3, \dots; \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$

### 2. Интегральные уравнения.

1. Союзное уравнение.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано  $K^*(x, y) = 1 \quad (x, y \in [0, 1], x, y \in \mathbb{R})$ . Найти собственные функции и характеристические числа этого оператора.
3. Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра  $\alpha$ , при котором интегральное уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_{|y| < 1} (10|x|^2 - 6|x||y|) \varphi(y) dy + |x|^2 + \alpha|x|, \quad |x| < 1, \quad x = (x_1, x_2),$   
 $y = (y_1, y_2)$  разрешимо для любых  $\lambda$ . Найти решения при этом значении  $\alpha$ .



### 3. УМФ 3 курс 6 семестр 1 задание



#### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_2(x)$ .

2. Решение задачи 
$$\begin{cases} u_t = 4\Delta u, & t > 0, r < 2, \\ u|_{r=2} = 0, u|_{t=0} = J_1\left(\mu_2^{(1)} \frac{r}{2}\right) \sin \varphi, \end{cases}$$
  $\mu_2^{(1)}$  - положительный ноль функции

$J_1(x)$ , записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).

3. Найти решение смешанной задачи  $u_t = 4\Delta u + J_2(\mu_3^{(2)} r) \sin 2\varphi \sin 2t$ ,  $r < 1$ ,  $t > 0$ ,  $u = u(r, \varphi, t)$ ;  $u|_{t=0} = f(r)(3 \sin 2\varphi - 4)$ ,  $u|_{r=1} = 0$ ,  $|u|_{r=0}| < \infty$ , где  $f(r)$  - гладкая на  $[0, 1]$  функция,  $\mu_j^{(k)}$  -  $j$ -й по порядку положительный ноль функции Бесселя  $J_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

#### 2. Интегральные уравнения.

1. Характеристические числа и собственные функции.

2. Дано ядро  $K(x, y) = -1$  ( $x, y \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ) интегрального оператора Фредгольма. Найти все решения однородного интегрального уравнения для этого оператора и выписать  $K^*(x, y)$ .

3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных  $\lambda$ :  $u(x) = \lambda \int_1^2 \left( \frac{4}{x^2 y^2} - 1 \right) u(y) dy + 3x^2 - 4$ ,  $u(x) \in C[1, 2]$ .



### 4. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



#### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_3(x)$ .

2. Решение задачи 
$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & t > 0, r < 2, \\ u|_{r=2} = 0, u|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)} \frac{r}{2}\right), u_t|_{t=0} = J_2\left(\mu_1^{(2)} \frac{r}{2}\right) \cos 2\varphi, \end{cases}$$
  $\mu_1^{(0)}$  - положительный ноль

функции  $J_0(x)$ ,  $\mu_1^{(2)}$  - положительный ноль функции  $J_2(x)$ , записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).

3. Найти решение смешанной задачи  $u_{tt} = \Delta u + J_1(2\mu_4^{(1)} r) \sin \varphi \sin(2\mu_4^{(1)} t)$ ,  $r < \frac{1}{2}$ ,  $t > 0$ ,

$u = u(r, \varphi, t)$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = f(r) \cos 2\varphi$ ,  $u|_{r=\frac{1}{2}} = 0$ ,  $|u|_{r=0}| < \infty$ , где  $f(r)$  - гладкая

на  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  функция,  $\mu_j^{(k)}$  -  $j$ -й по порядку положительный ноль функции Бесселя  $J_k$ ,

$k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

#### 2. Интегральные уравнения.

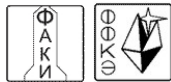
1. Теоремы Фредгольма для уравнений с вырожденным ядром.

2. Дать определение характеристического числа и собственной функции интегрального оператора Фредгольма.

3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных  $\lambda$ :  $u(x) = \lambda \int_0^1 (2\sqrt{xy} - 1) u(y) dy + 10x - 9$ ,  $u(x) \in C[0, 1]$ .



## 5. УМФ 3 курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

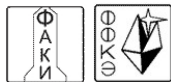
1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_4(x)$ .
2. Решение задачи  $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & t > 0, r < 1, \\ u|_{r=1} = 0, u|_{t=0} = r^2 \sin \varphi, u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$  записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу:  $u_t = \Delta u + J_1(r) \sin \varphi$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $r < \mu_1^{(1)}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $t > 0$ ;  $u|_{t=0} = J_1(r) \cos 2\varphi$ ,  $r \leq \mu_1^{(1)}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;  $u|_{r=\mu_1^{(1)}} = 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $t \geq 0$ , где  $\mu_1^{(1)}$  - минимальный положительный корень функции Бесселя  $J_1(r)$ .

### 2. Интегральные уравнения.

1. Уравнения с непрерывными и полярными ядрами.
2. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений.
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных  $\lambda$ :  $u(x) = \lambda \int_{1/2}^1 \left( \frac{3x^2}{y^2} - 8 \right) u(y) dy - 6x^2 + 7$ ,  $u(x) \in C\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .



## 6. УМФ 3 курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

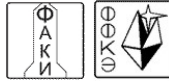
1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_5(x)$ .
2. Решение задачи  $\begin{cases} 4u_{tt} = \Delta u, & t > 0, r < 1, \\ u|_{r=1} = 0, u|_{t=0} = J_0(\mu_1^{(0)} r), u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$   $\mu_1^{(0)}$  - положительный ноль функции  $J_0(x)$ , записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу:  $u_t = 4\Delta u - tJ_3(r) \cos 3\varphi$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $r < \mu_1^{(3)}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $t > 0$ ;  $u|_{t=0} = \frac{1}{16} J_3(r) \cos 3\varphi + J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}}{\mu_1^{(3)}} r\right) \sin 2\varphi$ ,  $r \leq \mu_1^{(3)}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;  $u|_{r=\mu_1^{(3)}} = 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $t \geq 0$ , где  $\mu_1^{(2)} > 0$ ,  $\mu_1^{(3)} > 0$  - корни функций Бесселя  $J_2(r)$  и  $J_3(r)$  соответственно.

### 2. Интегральные уравнения.

1. Уравнение с малым по норме оператором, ряд Неймана.
2. Выписать в общем виде однородное и неоднородное интегральные уравнения Фредгольма (и указать условия на гладкость всех входящих в них функций).
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных  $\lambda$ :  $u(x) = \lambda \int_0^{\ln 2} \left( \frac{2}{3} e^{3x-y} - 3e^y \right) u(y) dy + 4e^{3x} - 18$ ,  $u(x) \in C[0, \ln 2]$ .



## 7. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_6(x)$ .
2. Решение задачи 
$$\begin{cases} u_t = 4\Delta u, & t > 0, r < 2, \\ u|_{r=2} = 0, u|_{t=0} = J_1\left(\mu_2^{(1)} \frac{r}{2}\right) \sin \varphi, \end{cases}$$
  $\mu_2^{(1)}$  - положительный ноль функции  $J_1(x)$ , записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу:  $u_t = \Delta u + J_1(r) \cos 2\varphi$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $r < \mu_1^{(1)}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $t > 0$ ;  $u|_{t=0} = J_1(r) \sin \varphi$ ,  $r \leq \mu_1^{(1)}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;  $u|_{r=\mu_1^{(1)}} = 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $t \geq 0$ , где  $\mu_1^{(1)}$  - минимальный положительный корень функции Бесселя  $J_1(r)$ .

### 2. Интегральные уравнения.

1. Резольвента и резольвентное ядро.
2. Сформулировать теорему Фредгольма, описывающую необходимые и достаточные условия для разрешимости неоднородного интегрального уравнения.
3. Решить интегральное уравнение:  $u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (5x^2 y^3 + 7x^3 y^2) u(y) dy + 5x + 7x^4$ ,  $u(x) \in C[-1, 1]$ , где  $\lambda$  - вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.



## 8. УМФ 3 курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

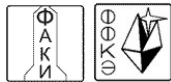
1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_7(x)$ .
2. Решение задачи 
$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & t > 0, r < 2, \\ u|_{r=2} = 0, u|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)} \frac{r}{2}\right), u_t|_{t=0} = J_2\left(\mu_1^{(2)} \frac{r}{2}\right) \cos 2\varphi, \end{cases}$$
  $\mu_1^{(0)}$  - положительный ноль функции  $J_0(x)$ ,  $\mu_1^{(2)}$  - положительный ноль функции  $J_2(x)$ , записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу:  $u_t = 9\Delta u - t J_2(r) \sin 2\varphi + J_4\left(\frac{\mu_1^{(4)}}{\mu_1^{(2)}} r\right) \cos 4\varphi$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $r < \mu_1^{(2)}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $t > 0$ ;  $u|_{t=0} = \frac{1}{81} J_2(r) \sin 2\varphi$ ,  $r < \mu_1^{(2)}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;  $u|_{r=\mu_1^{(2)}} = 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $t \geq 0$ , где  $\mu_1^{(2)} > 0$ ,  $\mu_1^{(4)} > 0$  - корни функций Бесселя  $J_2(r)$  и  $J_4(r)$  соответственно.

### 2. Интегральные уравнения.

1. Сведение уравнений с полярными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами.
2. Для интегрального уравнения Фредгольма  $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x e^{x^2} \operatorname{sh}^4 t + \sin x(t^2 - t^4) \cos t) y(t) dt + f(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $y \in L_2([-1, 1])$ ,  $f \in L_2([-1, 1])$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  выписать сопряженное однородное уравнение.
3. Решить интегральное уравнение:  $u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y - \cos^2 y) u(y) dy + 3 \sin x + \cos x$ ,  $u(x) \in C[-\pi, \pi]$ , где  $\lambda$  - вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.



## 9. УМФ 3 курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_8(x)$ .
2. Решение задачи  $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & t > 0, r < 1, \\ u|_{r=1} = 0, u|_{t=0} = r^2 \sin \varphi, u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$  записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу:  

$$u_t = 9\Delta u - 2u + J_2\left(\frac{\mu_3^{(2)}}{2}r\right)\cos 2\varphi, \quad (t > 0, r < 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad u|_{t=0} = f(r)\cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$(r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad u|_{r=2} = 0, \quad (t \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi);$$
 где  $u(t, r, \varphi)$  ограничена в окрестности  $r = 0, (t \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); f(r) \in C^1[0, 2], f(2) = 0, \mu_3^{(2)}$  - положительный нуль функции Бесселя первого рода  $J_2(\xi)$ .

### 2. Интегральные уравнения.

1. Теоремы Фредгольма в общем случае.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано  $K^*(x, y) = x - y^3x$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Выписать  $K(x, y)$ .
3. Решить интегральное уравнение:  $u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (3xy^2 + 5x^2y)u(y)dy + 5x^3 - 7x^4, u(x) \in C[-1, 1]$ , где  $\lambda$  - вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.



## 10. УМФ 3 курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_9(x)$ .
2. Решение задачи  $\begin{cases} 4u_{tt} = \Delta u, & t > 0, r < 1, \\ u|_{r=1} = 0, u|_{t=0} = J_0(\mu_1^{(0)}r), u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$   $\mu_1^{(0)}$  - положительный нуль функции  $J_0(x)$ , записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу:  

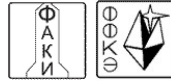
$$u_t = 4\Delta u - u + e^{-t}f(r)\sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad (t > 0, r < 5, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad u|_{t=0} = J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{5}r\right)\sin 3\varphi,$$

$$(r \leq 5, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad u|_{r=5} = 0, \quad (t \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi);$$
 где  $u(t, r, \varphi)$  ограничена в окрестности  $r = 0, (t \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); f(r) \in C^1[0, 5], f(5) = 0, \mu_2^{(3)}$  - положительный нуль функции Бесселя первого рода  $J_3(\xi)$ .

### 2. Интегральные уравнения.

1. Уравнения с эрмитовыми ядрами.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано  $K^*(x, y) = 1$  ( $x, y \in [0, 1], x, y \in \mathbb{R}$ ). Найти собственные функции и характеристические числа этого оператора.
3. Решить интегральное уравнение:  $u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{3}{2}x \cos y + y \cos x\right)u(y)dy + x^2 + 2\pi \sin x, u(x) \in C[-\pi, \pi]$ , где  $\lambda$  - вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

## 11. УМФ Курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_{10}(x)$ .

2. Решение задачи 
$$\begin{cases} u_t = 4\Delta u, & t > 0, r < 2, \\ u|_{r=2} = 0, u|_{t=0} = J_1\left(\mu_2^{(1)} \frac{r}{2}\right) \sin \varphi, \end{cases}$$
  $\mu_2^{(1)}$  - положительный ноль функции  $J_1(x)$ ,

записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).

3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу:

$$u_t = 9\Delta u - 2u + e^{-2t} J_1\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right) \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \quad (t > 0, r < 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad u|_{t=0} = f(r) \sin \varphi, \quad (r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi);$$

$$u|_{r=2} = 0, \quad (t \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad \text{где } u(t, r, \varphi) \text{ ограничена в окрестности } r = 0, \quad (t \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi);$$

$$f(r) \in C^1[0, 2], \quad f(2) = 0, \quad \mu_3^{(1)} \text{ - положительный ноль функции Бесселя первого рода } J_2(\xi).$$

### 2. Интегральные уравнения.

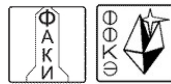
1. Симметричность интегрального оператора с эрмитовым ядром.

2. Дано ядро  $K(x, y) = -1$  ( $x, y \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ) интегрального оператора Фредгольма. Найти все решения однородного интегрального уравнения для этого оператора и выписать  $K^*(x, y)$ .

3. Решите при всех допустимых значениях  $\lambda$  и  $a$  уравнение 
$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy^3 - x^2y^2) \rho(y) dy + ax^2 + x^3$$
 и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.



## 12. УМФ Курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_{11}(x)$ .

2. Решение задачи 
$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & t > 0, r < 2, \\ u|_{r=2} = 0, u|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)} \frac{r}{2}\right), u_t|_{t=0} = J_2\left(\mu_1^{(2)} \frac{r}{2}\right) \cos 2\varphi, \end{cases}$$
  $\mu_1^{(0)}$  - положительный ноль

функции  $J_0(x)$ ,  $\mu_1^{(2)}$  - положительный ноль функции  $J_2(x)$ , записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).

3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу:  $u_t = 4\Delta u - 2u + f(r) \sin 5\varphi$ ,

$$(t > 0, r < 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad u|_{t=0} = J_5\left(\frac{\mu_1^{(5)}}{3} r\right) \sin\left(5\varphi - \frac{\pi}{3}\right), \quad (r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad u|_{r=3} = 0, \quad (t \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad \text{где}$$

$$u(t, r, \varphi) \text{ ограничена в окрестности } r = 0, \quad (t \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad f(r) \in C^1[0, 3], \quad f(3) = 0, \quad \mu_1^{(5)}$$

$$\text{- положительный ноль функции Бесселя первого рода } J_5(\xi).$$

### 2. Интегральные уравнения.

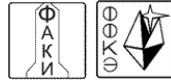
1. Теорема о существовании характеристических чисел.

2. Дать определение характеристического числа и собственной функции интегрального оператора Фредгольма.

3. Решите при всех допустимых значениях  $\lambda$  и  $a$  уравнение 
$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos y \cos x) \rho(y) dy + ax$$
  $+\cos x$  и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.



### 13. УМФ Курс 6 семестр 1 задание



#### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

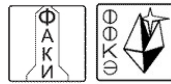
1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_{12}(x)$ .
2. Решение задачи  $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & t > 0, r < 1, \\ u|_{r=1} = 0, u|_{t=0} = r^2 \sin \varphi, u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$  записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу:  $u_t = 4\Delta u - u + J_2(\mu_3^{(2)} r) \cos 2\varphi, \quad r < 1, \quad t > 0, \quad u = u(r, \varphi, t), \quad u|_{t=0} = f(r)(2 \cos 2\varphi - 3),$   
 $u|_{r=1} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$  где  $f(r)$  – гладкая на  $[0,1]$  функция,  $\mu_3^{(2)}$  – положительный нуль функции Бесселя  $J_2, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$

#### 2. Интегральные уравнения.

1. Теорема Гильберта-Шмидта для уравнений с непрерывными эрмитовыми ядрами.
2. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений.
3. Решите при всех допустимых значениях  $\lambda$  и  $a$  уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 y^2 - xy) \rho(y) dy + x^3 + a$  и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.



### 14. УМФ Курс 6 семестр 1 задание



#### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

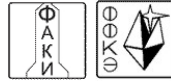
1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_{13}(x)$ .
2. Решение задачи  $\begin{cases} 4u_{tt} = \Delta u, & t > 0, r < 1, \\ u|_{r=1} = 0, u|_{t=0} = J_0(\mu_1^{(0)} r), u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$   $\mu_1^{(0)}$  – положительный нуль функции  $J_0(x)$ , записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу:  $u_t = 9\Delta u - 2u + f(r) \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad r < 2, \quad t > 0, \quad u = u(r, \varphi, t),$   
 $u|_{t=0} = f(r) \cos 3\varphi + 2J_1\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right) \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad u|_{r=2} = 0,$  где  $f(r)$  – гладкая на  $[0,2]$  функция,  $\mu_3^{(1)}$  – положительный нуль функции Бесселя  $J_1, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$

#### 2. Интегральные уравнения.

1. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода.
2. Выписать в общем виде однородное и неоднородное интегральные уравнения Фредгольма (и указать условия на гладкость всех входящих в них функций).
3. Решите при всех допустимых значениях  $\lambda$  и  $a$  уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \cos y + y \sin x) \rho(y) dy + \cos x + a \sin x$  и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.



## 15. УМФ 3 курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_{14}(x)$ .
2. Решение задачи 
$$\begin{cases} u_t = 4\Delta u, & t > 0, r < 2, \\ u|_{r=2} = 0, u|_{t=0} = J_1\left(\mu_2^{(1)} \frac{r}{2}\right) \sin \varphi, \end{cases} \quad \mu_2^{(1)} - \text{положительный ноль функции } J_1(x),$$

записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).

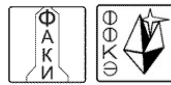
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: 
$$u_t = 5\Delta u - 3u + J_3\left(\frac{1}{4}\mu_2^{(3)}r\right) \cos 3\varphi + f(r) \sin 2\varphi, \quad r < 4, \quad t > 0, \quad u = u(r, \varphi, t), \quad u|_{t=0} = f(r) \cos 3\varphi, \\ u|_{r=4} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty, \quad \text{где } f(r) - \text{гладкая на } [0, 4] \text{ функция, } \mu_2^{(3)} - \text{положительный ноль функции Бесселя } J_3, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

### 2. Интегральные уравнения.

1. Союзное уравнение.
2. Сформулировать теорему Фредгольма, описывающую необходимые и достаточные условия для разрешимости неоднородного интегрального уравнения.
3. Найти решение уравнения 
$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left( \sin^3 x \cdot \frac{\operatorname{sh} y}{y} + x \operatorname{ch} x (y^2 + 2) e^{y^2} \right) \varphi(y) dy + f(x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$
 При каких  $f(x) \in C([-1, 1])$  и  $\lambda$  решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного оператора?



## 16. УМФ 3 курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_{15}(x)$ .
2. Решение задачи 
$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & t > 0, r < 2, \\ u|_{r=2} = 0, u|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)} \frac{r}{2}\right), u_t|_{t=0} = J_2\left(\mu_1^{(2)} \frac{r}{2}\right) \cos 2\varphi, \end{cases} \quad \mu_1^{(0)} - \text{положительный ноль функции } J_0(x), \quad \mu_1^{(2)} - \text{положительный ноль функции } J_2(x),$$

записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).

3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: 
$$u_t = 3\Delta u - 2u + f(r) \left( \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin 3\varphi \right), \quad r < 3, \quad t > 0, \quad u = u(r, \varphi, t), \quad u|_{t=0} = 2J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{3}r\right) \sin 3\varphi, \\ u|_{r=2} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty, \quad \text{где } f(r) - \text{гладкая на } [0, 3] \text{ функция, } \mu_2^{(3)} - \text{положительный ноль функции Бесселя } J_3, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

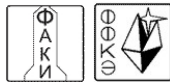
### 2. Интегральные уравнения.

1. Характеристические числа и собственные функции.
2. Для интегрального уравнения Фредгольма 
$$y(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left( x e^{x^2} \operatorname{sh}^4 t + \sin x (t^2 - t^4) \cos t \right) y(t) dt + f(x),$$
  $-1 \leq x \leq 1, \quad y \in L_2([-1, 1]), \quad f \in L_2([-1, 1]), \quad \lambda \in \mathbb{R}$  выписать сопряженное однородное уравнение.
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях  $\lambda$  уравнение 
$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + x^3) \varphi(y) dy + 2 \cos x.$$





## 17. УМФ Курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_{16}(x)$ .
2. Решение задачи  $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & t > 0, r < 1, \\ u|_{r=1} = 0, u|_{t=0} = r^2 \sin \varphi, & u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$  записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что  $f(r)$  и  $g(r)$  - гладкие функции на рассматриваемых отрезках,  $r, \varphi$  - полярные координаты:  $u_{tt} = \Delta u + f(r) \sin \varphi, r < 4, t > 0; u|_{t=0} = g(r) \sin \varphi, u_t|_{t=0} = 0, u|_{r=4} = 0$ .

### 2. Интегральные уравнения.

1. Теоремы Фредгольма для уравнений с вырожденным ядром.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано  $K^*(x, y) = x - y^3 x$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Выписать  $K(x, y)$ .
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях  $\lambda$  уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (24x^3 y^2 - 14x + 3) \rho(y) dy - 12x^3 + 1, 0 \leq x \leq 1$ .



## 18. УМФ Курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_{17}(x)$ .
2. Решение задачи  $\begin{cases} 4u_{tt} = \Delta u, & t > 0, r < 1, \\ u|_{r=1} = 0, u|_{t=0} = J_0(\mu_1^{(0)} r), & u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$   $\mu_1^{(0)}$  - положительный ноль функции  $J_0(x)$ , записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что  $f(r)$  и  $g(r)$  - гладкие функции на рассматриваемых отрезках,  $r, \varphi$  - полярные координаты:  $u_{tt} = \Delta u + f(r) \cos^2 \varphi, r < 3, t > 0; u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, r < 3; u|_{r=3} = 0, t > 0$ .

### 2. Интегральные уравнения.

1. Уравнения с непрерывными и полярными ядрами.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано  $K^*(x, y) = 1$  ( $x, y \in [0, 1], x, y \in \mathbb{R}$ ). Найти собственные функции и характеристические числа этого оператора.
3. Найти решение уравнения  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x e^{x^2} \operatorname{sh}^4 y + \sin x (y^2 - y^4) \cos y) \rho(y) dy + f(x), -1 \leq x \leq 1$ . При каких  $f(x) \in C([-1, 1])$  и  $\lambda$  решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного оператора?

## 19. УМФ Курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_{18}(x)$ .

2. Решение задачи 
$$\begin{cases} u_t = 4\Delta u, & t > 0, r < 2, \\ u|_{r=2} = 0, u|_{t=0} = J_1\left(\mu_2^{(1)} \frac{r}{2}\right) \sin \varphi, \end{cases}$$
  $\mu_2^{(1)}$  - положительный ноль функции  $J_1(x)$ ,

записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).

3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что  $f(r)$  и  $g(r)$  - гладкие функции на рассматриваемых отрезках,  $r, \varphi$  - полярные координаты:

$$4u_t = \Delta u - 8u + 4tf(r)\cos\varphi, \quad r < 6, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = 5J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{6}r\right)\cos 3\varphi, \quad u|_{r=6} = 0, \quad |u|_{r=0}| < +\infty,$$

$$\mu_k^{(3)} > 0, \quad J_3(\mu_k^{(3)}) = 0.$$

### 2. Интегральные уравнения.

1. Уравнение с малым по норме оператором, ряд Неймана.
2. Дано ядро  $K(x, y) = -1$  ( $x, y \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ) интегрального оператора Фредгольма. Найти все решения однородного интегрального уравнения для этого оператора и выписать  $K^*(x, y)$ .
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях  $\lambda$  уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\operatorname{sh} x + x^2 y^2) \varphi(y) dy - 3$ .



## 20. УМФ Курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_{19}(x)$ .

2. Решение задачи 
$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & t > 0, r < 2, \\ u|_{r=2} = 0, u|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)} \frac{r}{2}\right), u_t|_{t=0} = J_2\left(\mu_1^{(2)} \frac{r}{2}\right) \cos 2\varphi, \end{cases}$$
  $\mu_1^{(0)}$  -

положительный ноль функции  $J_0(x)$ ,  $\mu_1^{(2)}$  - положительный ноль функции  $J_2(x)$ , записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).

3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что  $f(r)$  и  $g(r)$  - гладкие функции на рассматриваемых отрезках,  $r, \varphi$  - полярные координаты:

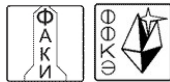
$$u_{tt} = 4\Delta u + f(r)\cos^2 \varphi, \quad r < 3, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{r=3} = 0, \quad |u|_{r=0}| < +\infty.$$

### 2. Интегральные уравнения.

1. Резольвента и резольвентное ядро.
2. Дать определение характеристического числа и собственной функции интегрального оператора Фредгольма.
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях  $\lambda$  уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (3x^2 - 6xy + 1) \varphi(y) dy + 4x - 1, \quad 0 \leq x \leq 1$ .



## 21. УМФ 3 курс 6 семестр 1 задание



### 1. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя  $J_{20}(x)$ .
2. Решение задачи  $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & t > 0, r < 1, \\ u|_{r=1} = 0, u|_{t=0} = r^2 \sin \varphi, u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$  записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от  $r$  и зависящих от  $\varphi$  (функции, зависящие от  $t$ , вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что  $f(r)$  и  $g(r)$  - гладкие функции на рассматриваемых отрезках,  $r, \varphi$  - полярные координаты:  
$$u_t = \frac{1}{9} \Delta u - 2u + e^{-t} f(r) \cos 4\varphi, \quad u = u(r, \varphi, t), \quad r < 2, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = 2J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{2} r\right) \sin 2\varphi,$$
  
$$u|_{r=2} = 0, \quad |u|_{r=0}| < +\infty, \quad \mu_k^{(2)} > 0, \quad J_2(\mu_k^{(2)}) = 0.$$

### 2. Интегральные уравнения.

1. Сведение уравнений с полярными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами.
2. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений.
3. Найти решение уравнения  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left( x \operatorname{sh}^2 x \cdot \frac{\sin^3 y}{y} + \sin^3 x \cdot y^2 \operatorname{ch} y \right) \varphi(y) dy + f(x), \quad -1 \leq x \leq 1$ . При каких  $f(x) \in C([-1,1])$  и  $\lambda$  решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного оператора?

✂ -----