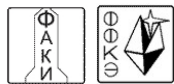


# 1. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



## 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $e^{2x}(y'' - 4y' + 3y) = \lambda y$ ,  $0 < x < \ln 2$ ,  $y'(0) - y(0) = 0$ ,  $y'(\ln 2) = 0$ .

## 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = \cos^4 \varphi \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in R^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить краевую задачу  $\Delta u = 9r$ ,  $\frac{1}{2} < r < 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ,  
 $u|_{r=\frac{1}{2}} = -\frac{7}{8} + 2 \cos^2 \varphi$ ,  $u_r|_{r=1} = 3 + \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

## 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для оператора Лапласа  $\Delta u$  в сферических координатах  $(r, \varphi, \theta)$   $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ .
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = \cos \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = 0$ ,  $1 < r < 2$ ,  $u|_{r=1} = 2 \sin^2 \varphi + \cos 2\theta \cos 2\varphi$ ,  $u|_{r=2} = 31 \sin 2\theta \sin \varphi$ .

## 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $R^3$ : полупространство  $x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле:  $\begin{cases} \Delta u = -f(x) & x_3 > 0 \\ u|_{x_3=0} = u_0(x) \end{cases}$  для непрерывных и ограниченных  $f(x)$  и  $u_0(x)$ .

## 5. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{x | x < R\}$  с плотностью  $\rho = \rho(|x|)$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{x | x < R\}$ , но и вне его.



-----

## 2. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.

2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 2, \\ y(0) = y'(2) = 0. \end{cases}$$

3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = \lambda y$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y(1) + y'(1) = 0$ .

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение.

2. Решение задачи 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 2, \\ (u + 2u_r)|_{r=2} = \cos^2 \varphi, & |u|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$$
 записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in R^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .

3. Решить краевую задачу  $\Delta u = 8r \sin \varphi$ ,  $r < 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ,  $u_r|_{r=1} = 3 \sin \varphi + \cos 3\varphi - 2 \cos 2\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  находят методом разделения переменных  $u(r, \varphi, \theta) = Z(r)Y(\varphi, \theta)$ . Выписать дифференциальные уравнения для  $Z(r)$  и  $Y(\varphi, \theta)$ .

2. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ : 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ |u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, & u|_{r=R} = \cos \theta. \end{cases}$$

3. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ : 
$$\Delta u = 20, \quad r < \sqrt{3}, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$
  $u|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15 \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin \theta \sin \varphi$ .

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).

2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $R^3$ : восьмая часть шара  $|x| < R, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ .

3. Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R$ : 
$$\begin{cases} \Delta u = -f(x) & |x| < R \\ u|_{|x|=R} = u_0(x) \end{cases}$$
.

### 5. Потенциалы.

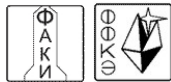
1. Дать определение поверхности Ляпунова.

2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.

3. На сфере радиуса  $R$  распределены диполи с плотностью момента  $\nu = \cos \theta$ , ориентированные вдоль внешней нормали. Найти потенциал двойного слоя в точке оси  $\theta = 0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).



### 3. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



#### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'' + y, & 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, & y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $(1 + e^{-x})y'' - y' = \lambda y + e^{2x}, \quad 0 < x < 2,$   
 $y(0) - 2 \ln 2 y'(0) = 0, \quad y'(2) = 0.$

#### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, \\ u|_{r=1} = \sin^2 \varphi + \cos^3 \varphi, & u|_{r=2} = 0 \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in \mathbb{R}^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить краевую задачу  $\Delta u = 8r \cos \varphi, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy},$   
 $u_r|_{r=1} = 2 \cos \varphi, \quad u|_{r=2} = 8 \cos \varphi + 2 \sin^2 \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

#### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  находят методом разделения переменных  $u(r, \varphi, \theta) = Z(r)Y(\varphi, \theta)$ . Пусть  $Y(\varphi, \theta) = \Phi(\varphi)X(\theta)$ . Выписать уравнение для  $\Phi(\varphi)$ , решение для этого уравнения, уравнение для функции  $X(\theta)$ .
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi]):$  
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = \cos^2 \theta. \end{cases}$$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi]):$   $\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad u_r|_{r=1} = 5 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi,$   
 $u|_{r=2} = -\frac{5}{6} - \frac{5}{2} \cos 2\theta.$

#### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

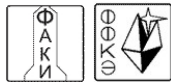
1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $\mathbb{R}^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $\mathbb{R}^3$ : четверть шара  $|x| < R, x_2 > 0, x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле: 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x_3 > 0, \\ u|_{x_3=0} = \theta(x_2 - x_1). \end{cases}$$

#### 5. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара  $\{|x| = R\}$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{|x| < R\}$ , но и вне его.



#### 4. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



##### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'' + 4y, & 0 < x < 1, \\ 2y(0) - y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению:  $(x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0.$

##### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & 2 < r < 4, \\ u|_{r=2} = 0, & u|_{r=4} = \varphi \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in \mathbb{R}^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить краевую задачу  $\Delta u = 10r \cos \varphi \sin \varphi, \quad r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \quad u|_{r=2} = 1 + 8 \sin 2\varphi - \sin 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

##### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Дать определение полиномов Лежандра  $P_n(\xi), \quad n = 0, 1, 2, \dots$ , выпписать дифференциальное уравнение, которому они удовлетворяют, также вычислить  $\int_{-1}^1 P_n(\xi) P_m(\xi) d\xi, \quad n \neq m.$
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi]): \begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ |u| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, & u|_{r=R} = \cos^2 \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi]): \Delta u = \frac{1}{r^4}, \quad r > 2, \quad u(\infty) = 0, \quad (u - u_r)|_{r=2} = \sin \theta \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right)$

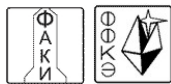
##### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $\mathbb{R}^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $\mathbb{R}^3$ : двугранный угол  $x_2 > 0, x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R: \begin{cases} \Delta u = 0, & |x| < R, \\ u|_{|x|=R} = 1. \end{cases}$

##### 5. Потенциалы.

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{|x| < R\}$  с постоянной плотностью. Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{|x| < R\}$ , но и вне его.

## 5. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
 
$$\begin{cases} -y'' + xy = \lambda y + x^3, & 1 < x < 2, \\ y(1) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ , где  $f(x)$  - непрерывная на отрезке  $[0;1]$  функция.

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 2, \\ u|_{r=2} = 3 + \sin \varphi \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x,y) \in R^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить краевую задачу  $\Delta u = \frac{8}{r^2} \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ ,  $r > 2$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $u|_{r=2} = \sin^4 \varphi$ ,  $|u|_{r=\infty} < \infty$ .

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Дать определение полиномов Лежандра  $P_n(\xi)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  и присоединенных полиномов Лежандра  $P_n^{(m)}(\xi)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, n$ .
2. Решить задачу  $((x,y,z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\begin{cases} \Delta u = 0, r < R, \\ u|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \sin \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x,y,z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = \frac{3}{r^5}, \frac{1}{2} < r < 1$ ;  $u|_{r=\frac{1}{2}} = 2 \cos^2 \varphi - \cos 2\theta \cos 2\varphi$ ,  $u_r|_{r=1} = \sin 2\theta \sin \varphi$ .

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Пользуясь методом отражений построить функцию Грина для части пространства, заключенного между параллельными плоскостями  $x_3 = 0$  и  $x_3 = 1$ .
3. Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R$ :  $\begin{cases} \Delta u = -a = const, & |x| < R, \\ u|_{|x|=R} = 0. \end{cases}$

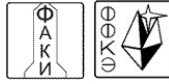
### 5. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал двойного слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара  $\{|x| = R\}$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{|x| < R\}$ , но и вне его.



-----

## 6. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, & 0 < x < 2, \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:  $-y'' + \frac{2}{x}y' = \lambda x^3 y$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y(1) - y'(1) = 0$ .

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 1, \\ u_r|_{r=1} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), & |u|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in R^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить краевую задачу  $\Delta u = \frac{64}{r^5} \sin \varphi$ ,  $1 < r < 2$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $u_r|_{r=1} = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ ,  $u_r|_{r=2} = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ .

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  в сферических координатах находят методом разделения переменных  $u(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(r) Y_n(\varphi, \theta)$ . Выписать формулы для  $Z_n(r)$  и  $Y_n(\varphi, \theta)$ .
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ |u| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, & u|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \sin \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = 6r^3$ ,  $1 < r < 2$ ;  $u|_{r=1} = (\cos 2\theta - 1) \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta$ ,  $u_r|_{r=2} = 15 + \sin \theta \cos \varphi$ .

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $R^3$ : полушар  $|x| < R, x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле:  $\begin{cases} \Delta u = -f(x), & x_3 > 0, \\ u|_{x_3=0} = u_0(x). \end{cases}$  для непрерывных и ограниченных  $f(x)$  и  $u_0(x)$ .

### 5. Потенциалы.

1. Разрыв потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала двойного слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. На круглом диске радиуса  $R$  распределены диполи с постоянной плотностью момента, ориентированные вдоль нормали, направленной в сторону отрицательных  $x_3$ . Найти потенциал двойного слоя в точке, лежащей на оси диска.



## 7. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
 
$$\begin{cases} -x^2 y'' - 2xy' = \lambda y, & 1 < x < 2, \\ y(1) + y'(1) = 0, & y(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+2)^2 y'' + (x+2)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $-1 < x < 0$ ,  $y'(-1) = 0$ ,  $y'(0) + \alpha y(0) = 0$ , где  $\alpha > 0$ ,  $f(x) \in C[-1; 0]$ .

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ (u + 2u_r)|_{r=R} = 2 \cos \varphi \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in \mathbb{R}^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить краевую задачу  $\Delta u = \frac{16}{r^2} \sin\left(4\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $r > \frac{1}{2}$ ,  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, u|_{r=\frac{1}{2}} = 8 \cos^4 \varphi$ ,  $|u|_{r=\infty} < \infty$ .

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

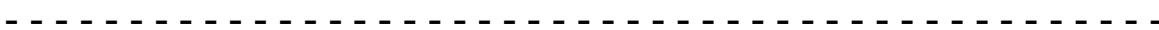
1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле  $u(r, \varphi, \theta)$  внутри шара  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = f(\varphi, \theta). \end{cases}$
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, \\ (u + u_r)|_{r=1} = \sin \theta \cos \varphi + \sin^2 \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = \frac{6}{r}, \frac{1}{3} < r < 1; u|_{r=\frac{1}{3}} = \cos^2 \theta \cos 2\varphi + 2 \sin^2 \varphi, u|_{r=1} = 1 + \cos \theta$ .

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

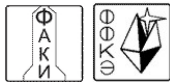
1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $\mathbb{R}^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $\mathbb{R}^3$ : октант  $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R$ :  $\begin{cases} \Delta u = -f(x), & |x| < R, \\ u|_{|x|=R} = u_0(x). \end{cases}$

### 5. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{|x| < R\}$  с постоянной плотностью. Рассмотреть случай  $n=2$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{|x| < R\}$ , но и вне его.



## 8. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
 
$$\begin{cases} -e^x y'' - e^x y' + x^3 y = \lambda y + \sin x, & 0 < x < 1, \\ y(0) + 2y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу:  $x^2 y'' - xy' + y = \lambda x^3 y + f(x)$ ,  $\frac{1}{2} < x < 1$ ,  $2y\left(\frac{1}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 2, \\ u|_{r=2} = \cos^2 \varphi, & |u|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in \mathbb{R}^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить краевую задачу  $\Delta u = \frac{18}{r^3} \sin 2\varphi$ ,  $\frac{1}{2} < r < 1$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $u_r|_{r=\frac{1}{2}} = 28 \sin^2 \varphi$ ,  $u_r|_{r=1} = 4 \cos^2 \varphi + 5$ .

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

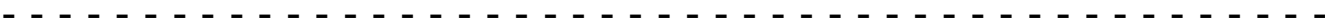
1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле  $u(r, \varphi, \theta)$  вне шара  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ u|_{r=R} = f(\varphi, \theta), & |u|_{r=\infty} < \infty. \end{cases}$
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 1, \\ |u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, & (u - 2u_r)|_{r=1} = 1 + \sin \varphi \sin \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = 12r$ ,  $1 < r < 3$ ;  $u|_{r=1} = 0$ ,  $u|_{r=3} = \cos 2\theta \sin 2\varphi + (\sin \theta - 2 \cos \varphi) \sin \varphi$ .

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $\mathbb{R}^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $\mathbb{R}^3$ : шар  $|x| < R$ .
3. Найти решение задачи Дирихле:  $\begin{cases} \Delta u = 0, & x_3 > 0, \\ u|_{x_3=0} = \theta(x_2 - x_1). \end{cases}$

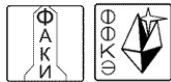
### 5. Потенциалы.

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. На круглом диске радиуса  $R$  распределен простой слой с плотностью  $\mu = r^2$ . Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска.





## 9. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = \alpha y(0)$ ,  $y'(1) = 0$ , где  $\alpha > 0$ ,  $f(x)$  - непрерывная на отрезке  $[0;1]$  функция.

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 10, \\ (u + 3u_r)|_{r=10} = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$
 записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in R^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить задачу:  $\Delta u = 96x^2$ ,  $(u - u_r)|_{r=1} = 12 \sin 2\varphi$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле  $u(r, \varphi, \theta)$  в сферическом слое 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & R_1 < r < R_2, \\ u|_{r=R_1} = f_1(\varphi, \theta), & u|_{r=R_2} = f_2(\varphi, \theta). \end{cases}$$
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ : 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = \cos \theta. \end{cases}$$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ : 
$$\Delta u = 24xy, \quad r < \frac{1}{2},$$
  
$$u|_{r=\frac{1}{2}} = \cos^2 \vartheta - 2 \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{16} \sin^4 \vartheta \sin 2\varphi.$$

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $R^3$ : полупространство  $x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R$ : 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |x| < R, \\ u|_{|x|=R} = 1. \end{cases}$$

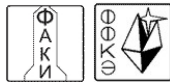
### 5. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{|x| < R\}$  с плотностью  $\rho = |x|$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{|x| < R\}$ , но и вне его.



-----

## 10. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 2, \\ y(0) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: 
$$-\frac{1}{x}y'' + \frac{1}{x^2}y' + \frac{3}{x^3}y = \lambda \sin xy + e^x, \quad 1 < x < 2,$$
$$y'(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0.$$

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 3, \\ u_r|_{r=3} = 2 - \sin^2 \varphi, & |u|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$$
 записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in R^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить задачу:  $\Delta u = 24x, (2u + u_r)|_{r=1} = 20 \sin^3 \varphi, r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для оператора Лапласа  $\Delta u$  в сферических координатах  $(r, \varphi, \theta)$   $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ .
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ : 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ |u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, & u|_{r=R} = \cos \theta. \end{cases}$$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = 1, 1 < r < 2; u|_{r=1} = 0, u|_{r=2} = 2 \sin \theta \sin \varphi + \frac{2}{3}$ .

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $R^3$ : восьмая часть шара  $|x| < R, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R$ : 
$$\begin{cases} \Delta u = -a = const, & |x| < R, \\ u|_{|x|=R} = 0. \end{cases}$$

### 5. Потенциалы.

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя, распределенный с постоянной плотностью на цилиндре  $\{x_1^2 + x_2^2 = R^2, 0 \leq x_3 \leq H\}$  в точке лежащей на оси  $x_3$ .

# 11. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



## 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'' + y, & 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, & y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+2)^2 y'' + (x+2)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(-1) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , где  $f(x) \in C[-1; 0]$ .

## 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = \cos^4 \varphi \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in \mathbb{R}^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить задачу:  $\Delta u = 96y^2$ ,  $(u + u_r)|_{r=1} = 20 \sin 2\varphi$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

## 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  находят методом разделения переменных  $u(r, \varphi, \theta) = Z(r)Y(\varphi, \theta)$ . Выписать дифференциальные уравнения для  $Z(r)$  и  $Y(\varphi, \theta)$ .
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = \cos^2 \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = 12(x^2 - y^2)$ ,  $1 < r < 2$ ;  $u|_{r=1} = 2 \sin 2\vartheta \sin \varphi + \sin^4 \vartheta \cos 2\varphi$ ,  $u|_{r=2} = -4 \sin^2 2\theta \cos 2\varphi$ .

## 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $\mathbb{R}^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $\mathbb{R}^3$ : четверть шара  $|x| < R, x_2 > 0, x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле:  $\begin{cases} \Delta u = -f(x), & x_3 > 0, \\ u|_{x_3=0} = u_0(x). \end{cases}$  для непрерывных и ограниченных  $f(x)$  и  $u_0(x)$ .

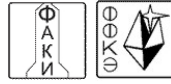
## 5. Потенциалы.

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя, распределенный с постоянной плотностью на цилиндре  $\{x_1^2 + x_2^2 = R^2, 0 \leq x_3 \leq H\}$  в точке лежащей на оси  $x_3$ .



-----

## 12. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'' + 4y, & 0 < x < 1, \\ 2y(0) - y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: 
$$-\frac{1}{\cos x} y'' + \frac{2 \operatorname{ctg} 2x}{\cos x} y' = \lambda y + f(x), \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3},$$
$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 2, \\ (u + 2u_r)_{r=2} = \cos^2 \varphi, & |u|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$$
 записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in \mathbb{R}^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить задачу:  $\Delta u = 24y, (u + u_r)_{r=1} = 16 \cos^3 \varphi, r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  находят методом разделения переменных  $u(r, \varphi, \theta) = Z(r)Y(\varphi, \theta)$ . Пусть  $Y(\varphi, \theta) = \Phi(\varphi)X(\theta)$ . Выписать уравнение для  $\Phi(\varphi)$ , решение для этого уравнения, уравнение для функции  $X(\theta)$ .
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ : 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ |u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, & u|_{r=R} = \cos^2 \theta. \end{cases}$$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = 6z, r < 1; u|_{r=1} = 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^3 \theta$ .

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $\mathbb{R}^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $\mathbb{R}^3$ : двугранный угол  $x_2 > 0, x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R$ : 
$$\begin{cases} \Delta u = -f(x), & |x| < R, \\ u|_{|x|=R} = u_0(x). \end{cases}$$

### 5. Потенциалы.

1. Разрыв потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала двойного слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара  $\{|x| = R\}$ . Рассмотреть случай  $n=2$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{|x| < R\}$ , но и вне его.



-----

### 13. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



#### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
 
$$\begin{cases} -y'' + xy = \lambda y + x^3, & 1 < x < 2, \\ y(1) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = \lambda y$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y(1) + y'(1) = 0$ .

#### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, \\ u|_{r=1} = \sin^2 \varphi + \cos^3 \varphi, & u|_{r=2} = 0 \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in R^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить задачу Неймана:  $\Delta u = 24(x^2 - y^2)$ ,  $(r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1)$ ;  $u_r|_{r=1} = 4 \cos 2\varphi + 4 \cos 4\varphi$ ,  $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ .

#### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

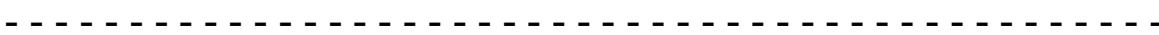
1. Дать определение полиномов Лежандра  $P_n(\xi)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , выписать дифференциальное уравнение, которому они удовлетворяют, также вычислить  $\int_{-1}^1 P_n(\xi) P_m(\xi) d\xi$ ,  $n \neq m$ .
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \sin \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = 12(x^2 - y^2)$ ,  $\frac{1}{2} < r < 1$ ;  $u_r|_{r=\frac{1}{2}} = 4 + \frac{1}{2} \sin^4 \theta \cos 2\varphi$ ,  $u_r|_{r=1} = 1 + 2 \sin \theta \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \varphi + 4 \sin^4 \theta \cos 2\varphi$ .

#### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Пользуясь методом отражений построить функцию Грина для части пространства, заключенного между параллельными плоскостями  $x_3 = 0$  и  $x_3 = 1$ .
3. Найти решение задачи Дирихле:  $\begin{cases} \Delta u = 0, & x_3 > 0, \\ u|_{x_3=0} = \theta(x_2 - x_1). \end{cases}$

#### 5. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{|x| < R\}$  с плотностью  $\rho = \sqrt{|x|}$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{|x| < R\}$ , но и вне его.



## 14. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
 
$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, & 0 < x < 2, \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $(1 + e^{-x})y'' - y' = \lambda y + e^{2x}, \quad 0 < x < 2,$   
 $y(0) - 2 \ln 2 y'(0) = 0, \quad y'(2) = 0.$

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & 2 < r < 4, \\ u|_{r=2} = 0, u|_{r=4} = \varphi \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in R^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi).$
3. Решить краевую задачу:  $\Delta u = -\frac{\cos \varphi}{r^2}, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2} > 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); (u - u_r)|_{r=1} = 3 \sin 2\varphi + 2 \cos \varphi,$   
 $(0 \leq \varphi \leq 2\pi); u(r, \varphi)$  - ограниченная функция при  $r > 1.$

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Дать определение полиномов Лежандра  $P_n(\xi), n = 0, 1, 2, \dots$  и присоединенных полиномов Лежандра  $P_n^{(m)}(\xi), m = 0, 1, 2, \dots, n.$
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$   
 $\varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi]): \begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ |u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, u|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \sin \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$   
 $\varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi]): \Delta u = 0, 1 < r < 2, u|_{r=1} = 2 \sin^2 \varphi + \cos 2\theta \cos 2\varphi, u|_{r=2} = 31 \sin 2\theta \sin \varphi.$

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

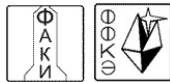
1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $R^3$ : полушар  $|x| < R, x_3 > 0.$
3. Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R: \begin{cases} \Delta u = 0 & |x| < R \\ u|_{|x|=R} = 1 \end{cases}.$

### 5. Потенциалы.

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. Для сферического слоя  $R_1 < |x| < R_2$  вычислить объемный потенциал масс, распределенных с постоянной плотностью.



## 15. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
 
$$\begin{cases} -x^2 y'' - 2xy' = \lambda y, & 1 < x < 2, \\ y(1) + y'(1) = 0, & y(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению:  $(x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y + \lambda y = 0$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y(1) - y'(1) = 0$ .

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, \\ u|_{r=2} = 3 + \sin \varphi \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in \mathbb{R}^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить краевую задачу:  $\Delta u = 24xy$ ,  $(r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1)$ ;  $(u + u_r)|_{r=1} = 2 \sin \varphi - 3 \sin 2\varphi$ ,  $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ .

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  в сферических координатах находят методом разделения переменных  $u(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(r) Y_n(\varphi, \theta)$ . Выписать формулы для  $Z_n(r)$  и  $Y_n(\varphi, \theta)$ .
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, \\ (u + u_r)|_{r=1} = \sin \theta \cos \varphi + \sin^2 \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = 20$ ,  $r < \sqrt{3}$ ,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ ,  $u|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15 \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin \theta \sin \varphi$ .

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $\mathbb{R}^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $\mathbb{R}^3$ : октант  $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R$ :  $\begin{cases} \Delta u = -a = \text{const} & |x| < R, \\ u|_{|x|=R} = 0 \end{cases}$ .

### 5. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. На круглом диске радиуса  $R$  распределен простой слой с плотностью  $\mu = \mu(\phi)$  - непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция. Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска.



-----

## 16. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
 
$$\begin{cases} -e^x y'' - e^x y' + x^3 y = \lambda y + \sin x, & 0 < x < 1, \\ y(0) + 2y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ , где  $f(x)$  - непрерывная на отрезке  $[0;1]$  функция.

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 1, \\ u_r|_{r=1} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), & |u|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in \mathbb{R}^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить краевую задачу:  $\Delta u = -2 \frac{\sin \varphi}{r^2}$ ,  $(r = \sqrt{x^2 + y^2} > 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ ;  $(u - u_r)|_{r=1} = 16 \sin^3 \varphi$ ,  $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ ;  $u(r, \varphi)$  - ограниченная функция при  $r > 1$ .

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле  $u(r, \varphi, \theta)$  внутри шара  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = f(\varphi, \theta). \end{cases}$
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 1, \\ |u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, & (u - 2u_r)|_{r=1} = 1 + \sin \varphi \sin \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = 0, 1 < r < 2, \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, u_r|_{r=1} = 5 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi, u|_{r=2} = -\frac{5}{6} - \frac{5}{2} \cos 2\theta$ .

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $\mathbb{R}^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $\mathbb{R}^3$ : шар  $|x| < R$ .
3. Найти решение задачи Дирихле:  $\begin{cases} \Delta u = -f(x) & x_3 > 0 \\ u|_{x_3=0} = u_0(x) \end{cases}$  для непрерывных и ограниченных  $f(x)$  и  $u_0(x)$ .

### 5. Потенциалы.

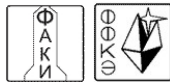
1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. С помощью потенциалов решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара  $|x| < R$  в  $\mathbb{R}^3$ .



-----



## 17. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:  $-y'' + \frac{2}{x}y' = \lambda x^3 y, \quad 0 < x < 1,$   
 $y'(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0.$

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ (u + 2u_r)|_{r=R} = 2 \cos \varphi \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in R^2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi).$
3. Решить краевую задачу  $\Delta u = 20r^2 \sin 6\varphi, \quad r < 1, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2};$   
 $(3u + u_r)|_{r=1} = 11 \sin 6\varphi - 5 \cos 7\varphi + 3.$

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле  $u(r, \varphi, \theta)$  вне шара  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ u|_{r=R} = f(\varphi, \theta), \quad |u|_{r \rightarrow \infty} < \infty. \end{cases}$
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, \quad x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$   
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi \in [0; 2\pi], \quad \theta \in [0; \pi]):$   $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = \cos \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, \quad x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$   
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi \in [0; 2\pi], \quad \theta \in [0; \pi]):$   $\Delta u = \frac{1}{r^4}, \quad r > 2, \quad u(\infty) = 0,$   
 $(u - u_r)|_{r=2} = \sin \theta \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right).$

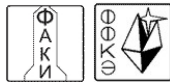
### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $R^3$ : полупространство  $x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R$ :  $\begin{cases} \Delta u = -f(x), & |x| < R, \\ u|_{|x|=R} = u_0(x). \end{cases}$

### 5. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{x| < R\}$  с плотностью  $\rho = e^{-|x|}$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{x| < R\}$ , но и вне его.

## 18. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 2, \\ y(0) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+2)^2 y'' + (x+2)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $-1 < x < 0$ ,  $y'(-1) = 0$ ,  $y'(0) + \alpha y(0) = 0$ , где  $\alpha > 0$ ,  $f(x) \in C[-1; 0]$ .

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 2, \\ u|_{r=2} = \cos^2 \varphi, & |u|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in R^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить краевую задачу  $\Delta u = \frac{3}{r^4} \cos \varphi$ ,  $r > 1$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $(4u - u_r)|_{r=1} = \cos \varphi + 24 \sin 4\varphi$ ,  $|u(\infty)| < \infty$ .

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ |u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, & u|_{r=R} = \cos \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = \frac{3}{r^5}, \frac{1}{2} < r < 1$ ;  $u|_{r=\frac{1}{2}} = 2 \cos^2 \varphi - \cos 2\theta \cos 2\varphi$ ,  $u_r|_{r=1} = \sin 2\theta \sin \varphi$ .

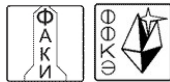
### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $R^3$ : восьмая часть шара  $|x| < R, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле:  $\begin{cases} \Delta u = 0, & x_3 > 0, \\ u|_{x_3=0} = \theta(x_2 - x_1). \end{cases}$

### 5. Потенциалы.

1. Разрыв потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала двойного слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{x| < R\}$  с плотностью  $\rho = \rho(|x|)$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{x| < R\}$ , но и вне его.

## 19. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'' + y, & 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, & y(1) = 0. \end{cases}$$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу:  $x^2 y'' - xy' + y = \lambda x^3 y + f(x)$ ,  $\frac{1}{2} < x < 1$ ,  $2y\left(\frac{1}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 10, \\ (u + 3u_r)|_{r=10} = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$
 записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in \mathbb{R}^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить краевую задачу  $\Delta u = r^3 \sin 3\varphi$ ,  $r < 1$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $(u + 3u_r)|_{r=1} = 11 \sin 3\varphi + 5 \cos 8\varphi - 3$ .

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для оператора Лапласа  $\Delta u$  в сферических координатах  $(r, \varphi, \theta)$   $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ .
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ : 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = \cos^2 \theta. \end{cases}$$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = 6r^3$ ,  $1 < r < 2$ ;  $u|_{r=1} = (\cos 2\theta - 1) \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta$ ,  $u_r|_{r=2} = 15 + \sin \theta \cos \varphi$ .

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $\mathbb{R}^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $\mathbb{R}^3$ : четверть шара  $|x| < R, x_2 > 0, x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R$ : 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |x| < R, \\ u|_{|x|=R} = 1. \end{cases}$$

### 5. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. На сфере радиуса  $R$  распределены диполи с плотностью момента  $\nu = \cos \theta$ , ориентированные вдоль внешней нормали. Найти потенциал двойного слоя в точке оси  $\theta = 0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).



-----

## 20. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'' + 4y, & 0 < x < 1, \\ 2y(0) - y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = \alpha y(0)$ ,  $y'(1) = 0$ , где  $\alpha > 0$ ,  $f(x)$  - непрерывная на отрезке  $[0;1]$  функция.

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 3, \\ u_r|_{r=3} = 2 - \sin^2 \varphi, & |u|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in \mathbb{R}^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .
3. Решить краевую задачу  $\Delta u = \frac{3}{r^4} \cos \varphi$ ,  $r > 1$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $(4u - u_r)|_{r=1} = \cos \varphi + 24 \sin 4\varphi$ ,  $|u(\infty)| < \infty$ .

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  находят методом разделения переменных  $u(r, \varphi, \theta) = Z(r)Y(\varphi, \theta)$ . Выписать дифференциальные уравнения для  $Z(r)$  и  $Y(\varphi, \theta)$ .
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > R, \\ |u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, & u|_{r=R} = \cos^2 \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi])$ :  $\Delta u = \frac{6}{r}, \frac{1}{3} < r < 1$ ;  $u|_{r=\frac{1}{3}} = \cos^2 \theta \cos 2\varphi + 2 \sin^2 \varphi$ ,  $u|_{r=1} = 1 + \cos \theta$ .

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

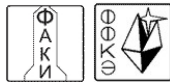
1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $\mathbb{R}^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $\mathbb{R}^3$ : двугранный угол  $x_2 > 0, x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R$ : 
$$\begin{cases} \Delta u = -a = const, & |x| < R, \\ u|_{|x|=R} = 0. \end{cases}$$

### 5. Потенциалы.

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. Найти потенциал простого слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара  $\{|x| = R\}$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{|x| < R\}$ , но и вне его.



## 21. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
 
$$\begin{cases} -y'' + xy = \lambda y + x^3, & 1 < x < 2, \\ y(1) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-\frac{1}{x}y'' + \frac{1}{x^2}y' + \frac{3}{x^3}y = \lambda \sin xy + e^x, \quad 1 < x < 2,$   
 $y'(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0.$

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи  $\begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = \cos^4 \varphi \end{cases}$  записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций  $((x, y) \in R^2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi).$
3. Решить краевую задачу  $\Delta u = 24y, \quad \frac{1}{3} < r < 1, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad u_r|_{r=\frac{1}{3}} = 12 \cos^2 \varphi,$   
 $u|_{r=1} = 9 \cos 2\varphi + 12 \sin \varphi.$

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  находят методом разделения переменных  $u(r, \varphi, \theta) = Z(r)Y(\varphi, \theta)$ . Пусть  $Y(\varphi, \theta) = \Phi(\varphi)X(\theta)$ . Выписать уравнение для  $\Phi(\varphi)$ , решение для этого уравнения, уравнение для функции  $X(\theta)$ .
2. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, \quad x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$   
 $\varphi \in [0; 2\pi], \quad \theta \in [0; \pi]): \begin{cases} \Delta u = 0, & r < R, \\ u|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \sin \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу  $((x, y, z) \in R^3, \quad x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$   
 $\varphi \in [0; 2\pi], \quad \theta \in [0; \pi]): \Delta u = 12r, \quad 1 < r < 3; \quad u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=3} = \cos 2\theta \sin 2\varphi + (\sin \theta - 2 \cos \varphi) \sin \varphi.$

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса  $R$  с центром в нуле для  $R^3$  и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в  $R^3$ : двугранный угол  $x_2 > 0, \quad x_3 > 0$ .
3. Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R$ :  $\begin{cases} \Delta u = -a = const, & |x| < R, \\ u|_{|x|=R} = 0. \end{cases}$

### 5. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{|x| < R\}$  с постоянной плотностью. Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{|x| < R\}$ , но и вне его.

