# 1. УМФ   3курс 6 семестр  **2 задание**

### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувиля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} Ly = -y'',\ 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $e^{2x}\left(y'' - 4y' + 3y\right) = \lambda y$, $0 < x < \ln 2$, $y'(0) - y(0) = 0$, $y'(\ln 2) = 0$.

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos^4\varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = 9r$, $\frac{1}{2} < r < 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$,

   $u\big|_{r=\frac{1}{2}} = -\frac{7}{8} + 2\cos^2\varphi$, $u_r\big|_{r=1} = 3 + \sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для оператора Лапласа $\Delta u$ в сферических координатах $(r, \varphi, \theta)$ ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$).
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = 0$, $1 < r < 2$, $u\big|_{r=1} = 2\sin^2\varphi + \cos 2\theta\cos 2\varphi$, $u\big|_{r=2} = 31\sin 2\theta\sin\varphi$.

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: полупространство $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{l} \Delta u = -f(x) \quad x_3 > 0 \\ u\big|_{x_3=0} = u_0(x) \end{array}\right.$ для непрерывных и ограниченных $f(x)$ и $u_0(x)$.

### 5. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{|x| < R\}$ с плотностью $\rho = \rho(|x|)$. Рассмотреть случай $n$=3. Определить потенциал не только в шаре $\{|x| < R\}$, но и вне его.

# 2. УМФ   3курс 6 семестр   **2 задание**

### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формцлы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} Ly = -y'',\ 0 < x < 2, \\ y(0) = y'(2) = 0. \end{cases}$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу: $-(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = \lambda y$, $0 < x < 1$, $y'(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$.

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r > 2, \\ (u + 2u_r)\big|_{r=2} = \cos^2\varphi,\ |u|\big|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = 8r\sin\varphi$, $r < 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $u_r\big|_{r=1} = 3\sin\varphi + \cos 3\varphi - 2\cos 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ находят методом разделения переменных $u(r,\varphi,\theta) = Z(r)Y(\varphi,\theta)$. Выписать дифференциальные уравнения для $Z(r)$ и $Y(\varphi,\theta)$.
2. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r > R, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0,\ u\big|_{r=R} = \cos\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\Delta u = 20$, $r < \sqrt{3}$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $u\big|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi$.

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: восьмая часть шара $|x| < R$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x| < R$: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u = -f(x) & |x| < R \\ u\big|_{|x|=R} = u_0(x) & \end{array}\right.$.

### 5. Потенциалы.

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. На сфере радиуса $R$ распределены диполи с плотностью момента $\nu = \cos\theta$, ориентированные вдоль внешней нормали. Найти потенциал двойного слоя в точке оси $\theta = 0$ $(0 \le \theta \le \pi)$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 3. УМФ   3курс 6 семестр   **2 задание**

### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувиля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} Ly = -y'' + y, \ 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, \ y(1) = 0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $(1+e^{-x})y'' - y' = \lambda y + e^{2x}$, $0 < x < 2$, $y(0) - 2\ln 2\, y'(0) = 0$, $y'(2) = 0$.

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2, \\ u\big|_{r=1} = \sin^2\varphi + \cos^3\varphi, \ u\big|_{r=2} = 0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = 8r\cos\varphi$, $1 < r < 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $u_r\big|_{r=1} = 2\cos\varphi$, $u\big|_{r=2} = 8\cos\varphi + 2\sin^2\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ находят методом разделения переменных $u(r,\varphi,\theta) = Z(r)Y(\varphi,\theta)$. Пусть $Y(\varphi,\theta) = \Phi(\varphi)X(\theta)$. Выписать уравнение для $\Phi(\varphi)$, решение для этого уравнения, уравнение для функции $X(\theta)$.
2. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\Delta u = 0$, $1 < r < 2$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $u_r\big|_{r=1} = 5\sin^2\theta\cos^2\varphi$, $u\big|_{r=2} = -\frac{5}{6} - \frac{5}{2}\cos 2\theta$.

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: четверть шара $|x| < R$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u = 0, & x_3 > 0, \\ u\big|_{x_3=0} = \theta(x_2 - x_1). & \end{array}\right.$.

### 5. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара $\{|x| = R\}$. Рассмотреть случай $n$=3. Определить потенциал не только в шаре $\{|x| < R\}$, но и вне его.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 4. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формцлы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} Ly = -y'' + 4y, \ 0 < x < 1, \\ 2y(0) - y'(0) = 0, \ y'(1) = 0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению: $(x^2+1)y'' + 2xy' - 2y + \lambda y = 0$, $0 < x < 1$, $y'(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 0$.

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ 2 < r < 4, \\ u\big|_{r=2} = 0, \ u\big|_{r=4} = \varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = 10r\cos\varphi\sin\varphi$, $r < 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $u\big|_{r=2} = 1 + 8\sin 2\varphi - \sin 3\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Дать определение полиномов Лежандра $P_n(\xi)$, $n = 0,1,2,\ldots$, выписать дифференциальное уравнение, которому они удовлетворяют, также вычислить $\int\limits_{-1}^{1} P_n(\xi)P_m(\xi)d\xi$, $n \ne m$.
2. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \ u\big|_{r=R} = \cos^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\Delta u = \dfrac{1}{r^4}$, $r > 2$, $u(\infty) = 0$, $(u - u_r)\big|_{r=2} = \sin\theta \cdot \cos^2\dfrac{\theta}{2} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \varphi\right)$

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: двугранный угол $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x| < R$: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u = 0, & |x| < R, \\ u\big|_{|x|=R} = 1. & \end{array}\right.$.

### 5. Потенциалы.

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{|x| < R\}$ с постоянной плотностью. Рассмотреть случай $n$=3. Определить потенциал не только в шаре $\{|x| < R\}$, но и вне его.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 5. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

**1. Задача Штурма-Лиувилля.**

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувиля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению: $$\begin{cases} -y'' + xy = \lambda y + x^3, \ 1 < x < 2, \\ y(1) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x), \quad 0 < x < 1$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$, где $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[0;1]$ функция.

**2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 2, \\ u\big|_{r=2} = 3 + \sin\varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y) \in \mathsf{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = \dfrac{8}{r^2}\cos\left(4\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right)$, $r > 2$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $u\big|_{r=2} = \sin^4\varphi$, $\left|u\big|_{r=\infty}\right| < \infty$.

**3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.**

1. Дать определение полиномов Лежандра $P_n(\xi)$, $n = 0,1,2,\dots$ и присоединенных полиномов Лежандра $P_n^{(m)}(\xi)$, $m = 0,1,2,\dots,n$.
2. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathsf{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathsf{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\Delta u = \dfrac{3}{r^5}$, $\dfrac{1}{2} < r < 1$; $u\big|_{r=\frac{1}{2}} = 2\cos^2\varphi - \cos 2\theta \cos 2\varphi$, $u_r\big|_{r=1} = \sin 2\theta \sin\varphi$.

**4. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Пользуясь методом отражений построить функцию Грина для части пространства, заключенного между параллельными плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x| < R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u = -a = const, \quad |x| < R, \\ u\big|_{|x|=R} = 0. \end{array}\right.$.

**5. Потенциалы.**

1. Дать определение потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал двойного слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара $\{|x| = R\}$. Рассмотреть случай $n$=3. Определить потенциал не только в шаре $\{|x| < R\}$, но и вне его.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 6. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формцлы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению: $\begin{cases} -y'' = \lambda y, \ 0 < x < 2, \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$
3. Свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению: $-y'' + \frac{2}{x} y' = \lambda x^3 y$, $0 < x < 1$, $y'(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 0$.

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > 1, \\ u_r\big|_{r=1} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \ \|u\|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = \frac{64}{r^5} \sin\varphi$, $1 < r < 2$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $u_r\big|_{r=1} = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$, $u_r\big|_{r=2} = \sin^2\frac{\varphi}{2}$.

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в сферических координатах находят методом разделения переменных $u(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(r) Y_n(\varphi, \theta)$. Выписать формулы для $Z_n(r)$ и $Y_n(\varphi, \theta)$.
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R, \\ |u| \xrightarrow[r \to \infty]{} 0, \ u\big|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = 6r^3$, $1 < r < 2$; $u\big|_{r=1} = (\cos 2\theta - 1)\sin^2\varphi + \sin^2\theta$, $u_r\big|_{r=2} = 15 + \sin\theta\cos\varphi$.

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: полушар $|x| < R, x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\begin{cases} \Delta u = -f(x), & x_3 > 0, \\ u\big|_{x_3=0} = u_0(x). \end{cases}$ для непрерывных и ограниченных $f(x)$ и $u_0(x)$.

### 5. Потенциалы.

1. Разрыв потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала двойного слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. На круглом диске радиуса $R$ распределены диполи с постоянной плотностью момента, ориентированные вдоль нормали, направленной в сторону отрицательных $x_3$. Найти потенциал двойного слоя в точке, лежащей на оси диска.

✂- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 7. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувиля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению: $\begin{cases} -x^2y''-2xy'=\lambda y,\ 1<x<2, \\ y(1)+y'(1)=0,\ y(2)=0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+2)^2y''+(x+2)y'=\lambda y+f(x)$, -1 < $x$ < 0, $y'(-1)=0$, $y'(0)+\alpha y(0)=0$, где $\alpha>0$, $f(x)\in C[-1;0]$.

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u=0,\ r<R, \\ \left.(u+2u_r)\right|_{r=R}=2\cos\varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in\mathsf{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u=\dfrac{16}{r^2}\sin\left(4\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $r>\dfrac{1}{2}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $\left.u\right|_{r=\frac{1}{2}}=8\cos^4\varphi$, $\left|\left.u\right|_{r=\infty}\right|<\infty$.

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле $u(r,\varphi,\theta)$ внутри шара $\begin{cases} \Delta u=0,\ r<R, \\ \left.u\right|_{r=R}=f(\varphi,\theta). \end{cases}$
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathsf{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u=0,\ r<1, \\ \left.(u+u_r)\right|_{r=1}=\sin\theta\cos\varphi+\sin^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathsf{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u=\dfrac{6}{r}$, $\dfrac{1}{3}<r<1$; $\left.u\right|_{r=\frac{1}{3}}=\cos^2\theta\cos2\varphi+2\sin^2\varphi$, $\left.u\right|_{r=1}=1+\cos\theta$.

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: октант $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u=-f(x),\quad |x|<R, \\ \left.u\right|_{|x|=R}=u_0(x). \end{array}\right.$

### 5. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{|x|<R\}$ с постоянной плотностью. Рассмотреть случай $n$=2. Определить потенциал не только в шаре $\{|x|<R\}$, но и вне его.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 8. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

## 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формцлы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению: $\begin{cases} -e^x y'' - e^x y' + x^3 y = \lambda y + \sin x, \ 0 < x < 1, \\ y(0) + 2y'(0) = 0, \ y'(1) = 0. \end{cases}$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу: $x^2 y'' - xy' + y = \lambda x^3 y + f(x)$, $\frac{1}{2} < x < 1$, $2y\left(\frac{1}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $y(1) = 0$.

## 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > 2, \\ u\big|_{r=2} = \cos^2 \varphi, \ |u|\big|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = \frac{18}{r^3} \sin 2\varphi$, $\frac{1}{2} < r < 1$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $u_r\big|_{r=\frac{1}{2}} = 28 \sin^2 \varphi$, $u_r\big|_{r=1} = 4\cos^2 \varphi + 5$.

## 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле $u(r, \varphi, \theta)$ вне шара $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R, \\ u\big|_{r=R} = f(\varphi, \theta), \ |u|\big|_{r=\infty} < \infty. \end{cases}$
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > 1, \\ |u| \xrightarrow[r \to \infty]{} 0, \ (u - 2u_r)\big|_{r=1} = 1 + \sin\varphi\sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = 12r$, $1 < r < 3$; $u\big|_{r=1} = 0$, $u\big|_{r=3} = \cos 2\theta \sin 2\varphi + (\sin\theta - 2\cos\varphi)\sin\varphi$.

## 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: шар $|x| < R$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u = 0, & x_3 > 0, \\ u\big|_{x_3=0} = \theta(x_2 - x_1). & \end{array}\right.$.

## 5. Потенциалы.

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. На круглом диске радиуса $R$ распределен простой слой с плотностью $\mu = r^2$. Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 9. УМФ  3курс 6 семестр  **2 задание**

### 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувиля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} Ly=-y'',\ 0<x<1, \\ y(0)=y(1)=0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+1)^2 y''-3(x+1)y'=\lambda y+f(x),\quad 0<x<1$, $y'(0)=\alpha y(0)$, $y'(1)=0$, где $\alpha>0$, $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[0;1]$ функция.

### 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u=0,\ r<10, \\ (u+3u_r)\big|_{r=10}=\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in \mathrm{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ ).
3. Решить задачу: $\Delta u=96x^2$, $(u-u_r)\big|_{r=1}=12\sin 2\varphi$, $r=\sqrt{x^2+y^2}<1$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

### 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле $u(r,\varphi,\theta)$ в сферическом слое $\begin{cases} \Delta u=0,\ R_1<r<R_2, \\ u\big|_{r=R_1}=f_1(\varphi,\theta),\ u\big|_{r=R_2}=f_2(\varphi,\theta). \end{cases}$
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u=0,\ r<R, \\ u\big|_{r=R}=\cos\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u=24xy$, $r<\dfrac{1}{2}$, $u\big|_{r=\frac{1}{2}}=\cos^2\vartheta-2\sin\theta\cos\varphi+\dfrac{1}{16}\sin^4\vartheta\sin 2\varphi$.

### 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: полупространство $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u=0,\quad |x|<R, \\ u\big|_{|x|=R}=1. \end{array}\right.$

### 5. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{|x|<R\}$ с плотностью $\rho=|x|$. Рассмотреть случай $n$=3. Определить потенциал не только в шаре $\{|x|<R\}$, но и вне его.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 10. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

**1. Задача Штурма-Лиувилля.**

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формцлы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} Ly=-y'',\ 0<x<2, \\ y(0)=y'(2)=0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-\dfrac{1}{x}y''+\dfrac{1}{x^2}y'+\dfrac{3}{x^3}y=\lambda\sin x\,y+e^x$, $1<x<2$, $y'(1)=0$, $y(2)+2y'(2)=0$.

**2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u=0,\ r>3, \\ u_r\big|_{r=3}=2-\sin^2\varphi,\ \|u\|_{r=\infty}<\infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in\mathrm{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$).
3. Решить задачу: $\Delta u=24x$, $(2u+u_r)\big|_{r=1}=20\sin^3\varphi$, $r=\sqrt{x^2+y^2}<1$, $0\le\varphi\le2\pi$.

**3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.**

1. Выписать формулу для оператора Лапласа $\Delta u$ в сферических координатах $(r,\varphi,\theta)$ ($(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$).
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u=0,\ r>R, \\ |u|\xrightarrow[r\to\infty]{}0,\ u\big|_{r=R}=\cos\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u=1$, $1<r<2$; $u\big|_{r=1}=0$, $u\big|_{r=2}=2\sin\theta\sin\varphi+\dfrac{2}{3}$.

**4. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: восьмая часть шара $|x|<R$, $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u=-a=const,\quad |x|<R, \\ u\big|_{|x|=R}=0. \end{array}\right.$.

**5. Потенциалы.**

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя, распределенный с постоянной плотностью на цилиндре $\{x_1{}^2+x_2{}^2=R^2,\ 0\le x_3\le H\}$ в точке лежащей на оси $x_3$.

# 11. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

## 1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувиля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} Ly = -y'' + y, \ 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, \ y(1) = 0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+2)^2 y'' + (x+2)y' = \lambda y + f(x), \quad 0 < x < 1$, $y'(-1) = 0$, $y'(0) = 0$, где $f(x) \in C[-1;0]$.

## 2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos^4 \varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить задачу: $\Delta u = 96y^2$, $(u + u_r)\big|_{r=1} = 20 \sin 2\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

## 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ находят методом разделения переменных $u(r,\varphi,\theta) = Z(r)Y(\varphi,\theta)$. Выписать дифференциальные уравнения для $Z(r)$ и $Y(\varphi,\theta)$.
2. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos^2 \theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\Delta u = 12(x^2 - y^2)$, $1 < r < 2$; $u\big|_{r=1} = 2\sin 2\vartheta \sin\varphi + \sin^4 \vartheta \cos 2\varphi$, $u\big|_{r=2} = -4\sin^2 2\theta \cos 2\varphi$.

## 4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: четверть шара $|x| < R$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{l} \Delta u = -f(x), \quad x_3 > 0, \\ u\big|_{x_3=0} = u_0(x). \end{array}\right.$ для непрерывных и ограниченных $f(x)$ и $u_0(x)$.

## 5. Потенциалы.

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя, распределенный с постоянной плотностью на цилиндре $\{x_1^2 + x_2^2 = R^2, 0 \le x_3 \le H\}$ в точке лежащей на оси $x_3$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 12. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

**1. Задача Штурма-Лиувилля.**

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формцлы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} Ly = -y'' + 4y,\ 0 < x < 1, \\ 2y(0) - y'(0) = 0,\ y'(1) = 0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-\dfrac{1}{\cos x} y'' + \dfrac{2\operatorname{ctg} 2x}{\cos x} y' = \lambda y + f(x)$, $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{3}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$.

**2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.**

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r > 2, \\ (u + 2u_r)\big|_{r=2} = \cos^2\varphi,\ |u|\big|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить задачу: $\Delta u = 24y$, $(u + u_r)\big|_{r=1} = 16\cos^3\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

**3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.**

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ находят методом разделения переменных $u(r,\varphi,\theta) = Z(r)Y(\varphi,\theta)$. Пусть $Y(\varphi,\theta) = \Phi(\varphi)X(\theta)$. Выписать уравнение для $\Phi(\varphi)$, решение для этого уравнения, уравнение для функции $X(\theta)$.
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r > R, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0,\ u\big|_{r=R} = \cos^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = 6z$, $r < 1$; $u\big|_{r=1} = 2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \cos^3\theta$.

**4. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: двугранный угол $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x| < R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u = -f(x),\ |x| < R, \\ u\big|_{|x|=R} = u_0(x). \end{array}\right.$

**5. Потенциалы.**

1. Разрыв потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала двойного слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара $\{|x| = R\}$. Рассмотреть случай $n$=2. Определить потенциал не только в шаре $\{|x| < R\}$, но и вне его.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 13. УМФ   3курс 6 семестр   **2 задание**

**1. Задача Штурма-Лиувилля.**

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувиля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению: $$\begin{cases} -y''+xy=\lambda y+x^3,\ 1<x<2, \\ y(1)=y'(2)=0. \end{cases}$$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу: $-(x^2+1)y''-2xy'+2y=\lambda y$, $0<x<1$, $y'(0)=0$, $y(1)+y'(1)=0$.

**2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u=0,\ 1<r<2, \\ u\big|_{r=1}=\sin^2\varphi+\cos^3\varphi,\ u\big|_{r=2}=0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in\mathrm{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$).
3. Решить задачу Неймана: $\Delta u=24(x^2-y^2)$, $\left(r=\sqrt{x^2+y^2}<1\right)$; $u_r\big|_{r=1}=4\cos 2\varphi+4\cos 4\varphi$, $(0\le\varphi\le 2\pi)$.

**3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.**

1. Дать определение полиномов Лежандра $P_n(\xi)$, $n=0,1,2,\ldots$, выписать дифференциальное уравнение, которому они удовлетворяют, также вычислить $\int\limits_{-1}^{1}P_n(\xi)P_m(\xi)d\xi$, $n\neq m$.
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u=0,\ r<R, \\ u\big|_{r=R}=\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u=12(x^2-y^2)$, $\dfrac{1}{2}<r<1$; $u_r\big|_{r=\frac{1}{2}}=4+\dfrac{1}{2}\sin^4\theta\cos 2\varphi$, $u_r\big|_{r=1}=1+2\sin\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}\sin\varphi+4\sin^4\theta\cos 2\varphi$.

**4. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Пользуясь методом отражений построить функцию Грина для части пространства, заключенного между параллельными плоскостями $x_3=0$ и $x_3=1$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u=0, & x_3>0, \\ u\big|_{x_3=0}=\theta(x_2-x_1). & \end{array}\right.$.

**5. Потенциалы.**

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{|x|<R\}$ с плотностью $\rho=\sqrt{|x|}$. Рассмотреть случай $n$=3. Определить потенциал не только в шаре $\{|x|<R\}$, но и вне его.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 14. УМФ    3курс 6 семестр    **2 задание**

**1. Задача Штурма-Лиувилля.**

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формцлы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению: $\begin{cases} -y'' = \lambda y, \ 0 < x < 2, \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $\left(1+e^{-x}\right)y'' - y' = \lambda y + e^{2x}$, $0 < x < 2$, $y(0) - 2\ln 2\, y'(0) = 0$, $y'(2) = 0$.

**2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ 2 < r < 4, \\ u\big|_{r=2} = 0, \ u\big|_{r=4} = \varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу: $\Delta u = -\dfrac{\cos\varphi}{r^2}$, $\left(r = \sqrt{x^2+y^2} > 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\right)$; $\left(u - u_r\right)\big|_{r=1} = 3\sin 2\varphi + 2\cos\varphi$, $(0 \le \varphi \le 2\pi)$; $u(r,\varphi)$ - ограниченная функция при $r > 1$.

**3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.**

1. Дать определение полиномов Лежандра $P_n(\xi)$, $n = 0,1,2,\ldots$ и присоединенных полиномов Лежандра $P_n^{(m)}(\xi)$, $m = 0,1,2,\ldots,n$.
2. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \ u\big|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\Delta u = 0$, $1 < r < 2$, $u\big|_{r=1} = 2\sin^2\varphi + \cos 2\theta\cos 2\varphi$, $u\big|_{r=2} = 31\sin 2\theta\sin\varphi$.

**4. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: полушар $|x| < R$, $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x| < R$: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & |x| < R \\ u\big|_{|x|=R} = 1 & \end{array}\right.$.

**5. Потенциалы.**

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. Для сферического слоя $R_1 < |x| < R_2$ вычислить объемный потенциал масс, распределенных с постоянной плотностью.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 15. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

**1. Задача Штурма-Лиувилля.**

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувиля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению: $\begin{cases} -x^2y'' - 2xy' = \lambda y, \ 1 < x < 2, \\ y(1) + y'(1) = 0, \ y(2) = 0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению: $(x^2+1)y'' + 2xy' - 2y + \lambda y = 0$, $0 < x < 1$, $y'(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 0$.

**2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.**

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 2, \\ u\big|_{r=2} = 3 + \sin\varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу: $\Delta u = 24xy$, $\left(r = \sqrt{x^2+y^2} < 1\right)$; $\left(u + u_r\right)\big|_{r=1} = 2\sin\varphi - 3\sin 2\varphi$, $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

**3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.**

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в сферических координатах находят методом разделения переменных $u(r,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(r) Y_n(\varphi,\theta)$. Выписать формулы для $Z_n(r)$ и $Y_n(\varphi,\theta)$.
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 1, \\ \left(u + u_r\right)\big|_{r=1} = \sin\theta\cos\varphi + \sin^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = 20$, $r < \sqrt{3}$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $u\big|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi$.

**4. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: октант $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x| < R$: $\begin{cases} \Delta u = -a = const \ |x| < R \\ u\big|_{|x|=R} = 0 \end{cases}$.

**5. Потенциалы.**

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. На круглом диске радиуса $R$ распределен простой слой с плотностью $\mu = \mu(\phi)$ - непрерывная $2\pi$-периодическая функция. Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 16. УМФ  3курс 6 семестр  **2 задание**

**1. Задача Штурма-Лиувилля.**

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формцлы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению: $\begin{cases} -e^x y'' - e^x y' + x^3 y = \lambda y + \sin x, \ 0 < x < 1, \\ y(0) + 2y'(0) = 0, \ y'(1) = 0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$, $0 < x < 1$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$, где $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[0;1]$ функция.

**2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.**

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > 1, \\ u_r\big|_{r=1} = \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right), \ |u|\big|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y) \in \mathsf{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу: $\Delta u = -2\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$, $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2} > 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\right)$; $\left(u - u_r\right)\big|_{r=1} = 16\sin^3\varphi$, $(0 \le \varphi \le 2\pi)$; $u(r,\varphi)$ - ограниченная функция при $r > 1$.

**3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.**

1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле $u(r,\varphi,\theta)$ внутри шара $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = f(\varphi,\theta). \end{cases}$
2. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathsf{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > 1, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \ \left(u - 2u_r\right)\big|_{r=1} = 1 + \sin\varphi\sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathsf{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\Delta u = 0$, $1 < r < 2$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $u_r\big|_{r=1} = 5\sin^2\theta\cos^2\varphi$, $u\big|_{r=2} = -\dfrac{5}{6} - \dfrac{5}{2}\cos 2\theta$.

**4. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $R^3$: шар $|x| < R$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{l} \Delta u = -f(x) \ x_3 > 0 \\ u\big|_{x_3=0} = u_0(x) \end{array}\right.$ для непрерывных и ограниченных $f(x)$ и $u_0(x)$.

**5. Потенциалы.**

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. С помощью потенциалов решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара $|x| < R$ в $R^3$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 17. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

**1. Задача Штурма-Лиувилля.**

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувиля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} Ly = -y'', \ 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$
3. Свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению: $-y'' + \dfrac{2}{x}y' = \lambda x^3 y$, $0 < x < 1$, $y'(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 0$.

**2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ (u + 2u_r)\big|_{r=R} = 2\cos\varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = 20r^2 \sin 6\varphi$, $r < 1$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $(3u + u_r)\big|_{r=1} = 11\sin 6\varphi - 5\cos 7\varphi + 3$ .

**3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.**

1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле $u(r,\varphi,\theta)$ вне шара $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R, \\ u\big|_{r=R} = f(\varphi,\theta), \ |u|\big|_{r=\infty} < \infty. \end{cases}$
2. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\Delta u = \dfrac{1}{r^4}$, $r > 2$, $u(\infty) = 0$, $(u - u_r)\big|_{r=2} = \sin\theta \cdot \cos^2\dfrac{\theta}{2} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \varphi\right)$.

**4. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: полупространство $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x| < R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u = -f(x), \ |x| < R, \\ u\big|_{|x|=R} = u_0(x). \end{array}\right.$

**5. Потенциалы.**

1. Дать определение потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{|x| < R\}$ с плотностью $\rho = e^{-|x|}$. Рассмотреть случай $n$=3. Определить потенциал не только в шаре $\{|x| < R\}$, но и вне его.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 18. УМФ    3курс 6 семестр    **2 задание**

**1. Задача Штурма-Лиувилля.**

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формцлы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} Ly = -y'', \ 0 < x < 2, \\ y(0) = y'(2) = 0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+2)^2 y'' + (x+2)y' = \lambda y + f(x)$, -1 < $x$ < 0, $y'(-1) = 0$, $y'(0) + \alpha y(0) = 0$, где $\alpha > 0$, $f(x) \in C[-1;0]$.

**2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > 2, \\ u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi, \ |u|\big|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = \dfrac{3}{r^4}\cos\varphi$, $r > 1$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $(4u - u_r)\big|_{r=1} = \cos\varphi + 24\sin 4\varphi$, $|u(\infty)| < \infty$.

**3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \ u\big|_{r=R} = \cos\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\Delta u = \dfrac{3}{r^5}$, $\dfrac{1}{2} < r < 1$; $u\big|_{r=\frac{1}{2}} = 2\cos^2\varphi - \cos 2\theta\cos 2\varphi$, $u_r\big|_{r=1} = \sin 2\theta\sin\varphi$.

**4. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: восьмая часть шара $|x| < R$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u = 0, & x_3 > 0, \\ u\big|_{x_3=0} = \theta(x_2 - x_1). & \end{array}\right.$.

**5. Потенциалы.**

1. Разрыв потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала двойного слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{|x| < R\}$ с плотностью $\rho = \rho(|x|)$. Рассмотреть случай $n$=3. Определить потенциал не только в шаре $\{|x| < R\}$, но и вне его.

**19. УМФ** 3курс 6 семестр **2 задание**

**1. Задача Штурма-Лиувилля.**

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувиля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} Ly = -y'' + y, \ 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, \ y(1) = 0. \end{cases}$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу: $x^2 y'' - xy' + y = \lambda x^3 y + f(x)$, $\frac{1}{2} < x < 1$, $2y\left(\frac{1}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $y(1) = 0$.

**2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.**

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 10, \\ (u + 3u_r)\big|_{r=10} = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = r^3 \sin 3\varphi$, $r < 1$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $(u + 3u_r)\big|_{r=1} = 11\sin 3\varphi + 5\cos 8\varphi - 3$.

**3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.**

1. Выписать формулу для оператора Лапласа $\Delta u$ в сферических координатах $(r, \varphi, \theta)$ ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$).
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = 6r^3$, $1 < r < 2$; $u\big|_{r=1} = (\cos 2\theta - 1)\sin^2\varphi + \sin^2\theta$, $u_r\big|_{r=2} = 15 + \sin\theta\cos\varphi$.

**4. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: четверть шара $|x| < R, \ x_2 > 0$, $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x| < R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad |x| < R, \\ u\big|_{|x|=R} = 1. \end{array}\right.$.

**5. Потенциалы.**

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. На сфере радиуса $R$ распределены диполи с плотностью момента $\nu = \cos\theta$, ориентированные вдоль внешней нормали. Найти потенциал двойного слоя в точке оси $\theta = 0$ $(0 \le \theta \le \pi)$.

# 20. УМФ  3курс 6 семестр  **2 задание**

**1. Задача Штурма-Лиувилля.**

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формцлы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} Ly = -y'' + 4y, \ 0 < x < 1, \\ 2y(0) - y'(0) = 0, \ y'(1) = 0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x), \quad 0 < x < 1$, $y'(0) = \alpha y(0)$, $y'(1) = 0$, где $\alpha > 0$, $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[0;1]$ функция.

**2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.**

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > 3, \\ u_r\big|_{r=3} = 2 - \sin^2\varphi, \ |u|\big|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = \dfrac{3}{r^4}\cos\varphi$, $r > 1$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $(4u - u_r)\big|_{r=1} = \cos\varphi + 24\sin 4\varphi$, $|u(\infty)| < \infty$.

**3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.**

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ находят методом разделения переменных $u(r,\varphi,\theta) = Z(r)Y(\varphi,\theta)$. Выписать дифференциальные уравнения для $Z(r)$ и $Y(\varphi,\theta)$.
2. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \ u\big|_{r=R} = \cos^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\Delta u = \dfrac{6}{r}$, $\dfrac{1}{3} < r < 1$; $u\big|_{r=\frac{1}{3}} = \cos^2\theta\cos 2\varphi + 2\sin^2\varphi$, $u\big|_{r=1} = 1 + \cos\theta$.

**4. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathbb{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathbb{R}^3$: двугранный угол $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x| < R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u = -a = const, \quad |x| < R, \\ u\big|_{|x|=R} = 0. \end{array}\right.$.

**5. Потенциалы.**

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. Найти потенциал простого слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара $\{|x| = R\}$. Рассмотреть случай $n$=3. Определить потенциал не только в шаре $\{|x| < R\}$, но и вне его.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 21. УМФ  3курс 6 семестр **2 задание**

**1. Задача Штурма-Лиувилля.**

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувиля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению: $\begin{cases} -y''+xy=\lambda y+x^3,\ 1<x<2, \\ y(1)=y'(2)=0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $-\frac{1}{x}y''+\frac{1}{x^2}y'+\frac{3}{x^3}y=\lambda\sin x\,y+e^x$, $1<x<2$, $y'(1)=0$, $y(2)+2y'(2)=0$.

**2. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u=0,\ r<R, \\ u|_{r=R}=\cos^4\varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in\mathrm{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u=24y$, $\frac{1}{3}<r<1$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$; $u_r|_{r=\frac{1}{3}}=12\cos^2\varphi$, $u|_{r=1}=9\cos 2\varphi+12\sin\varphi$.

**3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.**

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u=0$ находят методом разделения переменных $u(r,\varphi,\theta)=Z(r)Y(\varphi,\theta)$. Пусть $Y(\varphi,\theta)=\Phi(\varphi)X(\theta)$. Выписать уравнение для $\Phi(\varphi)$, решение для этого уравнения, уравнение для функции $X(\theta)$.
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u=0,\ r<R, \\ u|_{r=R}=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u=12r$, $1<r<3$; $u|_{r=1}=0$, $u|_{r=3}=\cos 2\theta\sin 2\varphi+(\sin\theta-2\cos\varphi)\sin\varphi$.

**4. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathrm{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathrm{R}^3$: двугранный угол $x_2>0$, $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u=-a=const,\quad |x|<R, \\ u|_{|x|=R}=0. \end{array}\right.$.

**5. Потенциалы.**

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{|x|<R\}$ с постоянной плотностью. Рассмотреть случай $n$=3. Определить потенциал не только в шаре $\{|x|<R\}$, но и вне его.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -