1. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

1. Задача Коши в R^n $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Поставить задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности в R^n (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
2. Решить задачу Коши: $9u_t = \Delta u$, $(x, y) \in \mathsf{R}^2$; $u\big|_{t=0} = (xy)^2$.
3. Найти решение задачи $u_t = \dfrac{1}{4}\Delta u + \cos(5x)\cdot e^{t-5z}$, $(x, y, z) \in \mathsf{R}^3$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = y^3 \operatorname{sh} 2x$, $(x, y, z) \in \mathsf{R}^3$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 2], удовлетворяющие условиям: $f(0) = 0$, $f(2) = 0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ 0 < x < \pi, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_t\big|_{t=0} = g(x), \ u\big|_{x=0} = 0 = u_x\big|_{x=\pi} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} = u_{xx} + x^2 - \pi x$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = x$, $u_t\big|_{t=0} = -1$, $0 \le x \le \pi$; $u\big|_{x=0} = -t$, $u\big|_{x=\pi} = \pi - t$, $t \ge 0$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в R^3 и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos^4 \varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathsf{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = 9r$, $\dfrac{1}{2} < r < 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $u\big|_{r=\frac{1}{2}} = -\dfrac{7}{8} + 2\cos^2\varphi$, $u_r\big|_{r=1} = 3 + \sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для оператора Лапласа Δu в сферических координатах (r, φ, θ) ($(x, y, z) \in \mathsf{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$).
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathsf{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathsf{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = 0$, $1 < r < 2$, $u\big|_{r=1} = 2\sin^2\varphi + \cos 2\theta \cos 2\varphi$, $u\big|_{r=2} = 31 \sin 2\theta \sin\varphi$.

2. УМФ 3курс 6 семестр 2 задание

1. Задача Коши в R^n $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Выписать формулу Пуассона для решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в R^n (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
2. Решить задачу Коши: $u_t = 4\Delta u$, $(x, y) \in \mathrm{R}^2$; $u\big|_{t=0} = \sin x + \cos y$.
3. Найти решение задачи $u_t = \Delta u + y \cdot e^{2z-t}$, $(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = \left(y - x^4\right)\sin z$, $(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 3], удовлетворяющие условиям: $f(0) = 0$, $f'(3) = 0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + 4u + \cos t, \ t > 0, \ 0 < x < 1, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_t\big|_{t=0} = g(x), \ u_x\big|_{x=0} = 0 = u_x\big|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = u_{xx} + 2x$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = 0$, $0 \le x \le \pi$; $u_x\big|_{x=0} = t$, $u_x\big|_{x=\pi} = t$, $t \ge 0$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в R^3 и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > 2, \\ \left(u + 2u_r\right)\big|_{r=2} = \cos^2\varphi, \ |u|\big|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = 8r\sin\varphi$, $r < 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $u_r\big|_{r=1} = 3\sin\varphi + \cos 3\varphi - 2\cos 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ находят методом разделения переменных $u(r, \varphi, \theta) = Z(r)Y(\varphi, \theta)$. Выписать дифференциальные уравнения для $Z(r)$ и $Y(\varphi, \theta)$.
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \ u\big|_{r=R} = \cos\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = 20$, $r < \sqrt{3}$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $u\big|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi$.

✂ -

3. УМФ 3курс 6 семестр 2 задание

1. Задача Коши в R^n $(n = 2{,}3)$ для уравнения теплопроводности

1. Сформулировать принцип максимума для уравнения теплопроводности.
2. Решить задачу Коши: $u_t = 4\Delta u$, $(x, y) \in \mathrm{R}^2$; $u\big|_{t=0} = \sin x \cdot \cos y$.
3. Решить задачу Коши: $u_t = 2\Delta u + \left(x^2 + 4y^2 - 5z^2\right)e^t$, $(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = xy^2$, $(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$, удовлетворяющие условиям: $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + F(x,t), \ t > 0, \ 0 < x < 2, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_t\big|_{t=0} = g(x), \ u_x\big|_{x=0} = 0 = u_x\big|_{x=2} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} = u_{xx} + (0.5\pi - 5x)\cdot\cos 2t$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = x$, $u_t\big|_{t=0} = 0$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$; $u_x\big|_{x=0} = \cos 2t$, $u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0.5\pi\cdot\cos 2t$, $t \ge 0$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2, \\ u\big|_{r=1} = \sin^2\varphi + \cos^3\varphi, \ u\big|_{r=2} = 0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = 8r\cos\varphi$, $1 < r < 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $u_r\big|_{r=1} = 2\cos\varphi$, $u\big|_{r=2} = 8\cos\varphi + 2\sin^2\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ находят методом разделения переменных $u(r,\varphi,\theta) = Z(r)Y(\varphi,\theta)$. Пусть $Y(\varphi,\theta) = \Phi(\varphi)X(\theta)$. Выписать уравнение для $\Phi(\varphi)$, решение для этого уравнения, уравнение для функции $X(\theta)$.
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = 0$, $1 < r < 2$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $u_r\big|_{r=1} = 5\sin^2\theta\cos^2\varphi$, $u\big|_{r=2} = -\dfrac{5}{6} - \dfrac{5}{2}\cos 2\theta$.

- -

4. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

1. Задача Коши в Rn $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Поставить задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности в R^n (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
2. Решить задачу Коши в: $4u_t = \Delta u$, $(x, y) \in \mathsf{R}^2$; $u\big|_{t=0} = e^x \cdot y^2$.
3. Решить задачу Коши: $u_t = 4\Delta u + e^{x+z+4t}$, $(x, y, z) \in \mathsf{R}^3$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = x^3 \cos y$, $(x, y, z) \in \mathsf{R}^3$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

4. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 3], удовлетворяющие условиям: $f'(0) = 0$, $f(3) = 0$.
5. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + F(x,t), \ t > 0, \ 0 < x < 2, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_t\big|_{t=0} = g(x), \ u\big|_{x=0} = 0 = u\big|_{x=2} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
6. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = u_{xx} + 1 + x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = \pi x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$; $u\big|_{x=0} = t$, $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi$, $t \ge 0$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ 2 < r < 4, \\ u\big|_{r=2} = 0, \ u\big|_{r=4} = \varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathsf{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = 10r\cos\varphi\sin\varphi$, $r < 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $u\big|_{r=2} = 1 + 8\sin 2\varphi - \sin 3\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Дать определение полиномов Лежандра $P_n(\xi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, выписать дифференциальное уравнение, которому они удовлетворяют, также вычислить $\int\limits_{-1}^{1} P_n(\xi) P_m(\xi) d\xi$, $n \ne m$.
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathsf{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R, \\ |u| \xrightarrow[r \to \infty]{} 0, \ u\big|_{r=R} = \cos^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathsf{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = \dfrac{1}{r^4}$, $r > 2$, $u(\infty) = 0$, $(u - u_r)\big|_{r=2} = \sin\theta \cdot \cos^2\dfrac{\theta}{2} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \varphi\right)$

5. УМФ 3курс 6 семестр 2 задание

1. Задача Коши в $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

2. Выписать формулу Пуассона для решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$ (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
3. Решить задачу Коши: $9u_t = \Delta u$, $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$; $u\big|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2$.
4. Решить задачу Коши: $u_t - \Delta u = \cos(3t + x + y + z)$, $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = xyz\cdot\cos x$, $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;2]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f'(2)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, \ t>0, \ 0<x<1, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_x\big|_{x=0} = 0 = u\big|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = u_{xx} + 1 + x$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = \pi x$, $0\le x\le \dfrac{\pi}{2}$; $u\big|_{x=0} = t$, $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi$, $t\ge 0$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в R^3 и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, r<2, \\ u\big|_{r=2} = 3+\sin\varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = \dfrac{8}{r^2}\cos\left(4\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right)$, $r>2$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $u\big|_{r=2} = \sin^4\varphi$, $\left|u\big|_{r=\infty}\right| < \infty$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Дать определение полиномов Лежандра $P_n(\xi)$, $n = 0,1,2,\ldots$ и присоединенных полиномов Лежандра $P_n^{(m)}(\xi)$, $m = 0,1,2,\ldots,n$.
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<R, \\ u\big|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u = \dfrac{3}{r^5}$, $\dfrac{1}{2}<r<1$; $u\big|_{r=\frac{1}{2}} = 2\cos^2\varphi - \cos 2\theta\cos 2\varphi$, $u_r\big|_{r=1} = \sin 2\theta\sin\varphi$.

✂ -

6. УМФ 3курс 6 семестр 2 задание

1. Задача Коши в R^n $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Сформулировать принцип максимума для уравнения теплопроводности.
2. Решить задачу Коши: $u_t = 2\Delta u$, $(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$; $u\big|_{t=0} = \sin x + \sin y + \sin z$.
3. Решить задачу Коши: $u_t - \Delta u = e^{t+x+y}\cos z$, $(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $t > 0$;
   $u\big|_{t=0} = (x + y + z)\cdot \sin x$, $(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0; \pi]$, удовлетворяющие условиям: $f(0) = 0$, $f'(\pi) = 0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} 9u_{tt} = u_{xx},\ t > 0,\ 0 < x < 3, \\ u\big|_{t=0} = f(x),\ u_x\big|_{x=0} = 0 = u\big|_{x=3} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
   $u_{tt} = 3u_{xx} + 3u - 3tx - 6t + 9\pi \sin t \sin\dfrac{x}{2}$, $(t > 0,\ 0 < x < \pi)$; $u\big|_{t=0} = 0$, $(0 \le x \le \pi)$;
   $u_t\big|_{t=0} = 2 + x$, $(0 \le x \le \pi)$; $u\big|_{x=0} = 2t$, $(t \ge 0)$; $u\big|_{x=\pi} = 2t + \pi t$, $(t \ge 0)$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в R^3 и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r > 1, \\ u_r\big|_{r=1} = \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right),\ |u|\big\|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = \dfrac{64}{r^5}\sin\varphi$, $1 < r < 2$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $u_r\big|_{r=1} = 2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$, $u_r\big|_{r=2} = \sin^2\dfrac{\varphi}{2}$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в сферических координатах находят методом разделения переменных $u(r, \varphi, \theta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n(r) Y_n(\varphi, \theta)$. Выписать формулы для $Z_n(r)$ и $Y_n(\varphi, \theta)$.
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r > R, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0,\ u\big|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = 6r^3$, $1 < r < 2$; $u\big|_{r=1} = (\cos 2\theta - 1)\sin^2\varphi + \sin^2\theta$, $u_r\big|_{r=2} = 15 + \sin\theta\cos\varphi$.

✂ -

7. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

1. Задача Коши в $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Поставить задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$ (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
2. Решить задачу Коши: $u_t = 4\Delta u$, $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$; $u\big|_{t=0} = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$
3. Решить задачу Коши: $u_t = 0.5\Delta u + cht \cdot e^{-5z} \cdot \cos(3x+4y)$, $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = (x+y)\cdot \cos(x+z)$, $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;1]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f'(1)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ t>0,\ 0<x<\pi, \\ u\big|_{t=0} = f(x),\ u_t\big|_{t=0} = g(x),\ u\big|_{x=0} = 0 = u_x\big|_{x=\pi} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} = u_{xx} + 5u - 5tx - 5t + 9\pi e^{-t}\sin 2x$, $\left(t>0,\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$; $u\big|_{t=0} = 0$, $\left(0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\right)$; $u_t\big|_{t=0} = 1+x$, $\left(0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\right)$; $u\big|_{x=0} = t$, $(t\ge 0)$; $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = t$, $(t\ge 0)$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<R, \\ (u+2u_r)\big|_{r=R} = 2\cos\varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in \mathbb{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = \dfrac{16}{r^2}\sin\left(4\varphi + \dfrac{\pi}{3}\right)$, $r > \dfrac{1}{2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $u\big|_{r=\frac{1}{2}} = 8\cos^4\varphi$, $\left|u\big|_{r=\infty}\right| < \infty$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле $u(r,\varphi,\theta)$ внутри шара $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<R, \\ u\big|_{r=R} = f(\varphi,\theta). \end{cases}$
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<1, \\ (u+u_r)\big|_{r=1} = \sin\theta\cos\varphi + \sin^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u = \dfrac{6}{r}$, $\dfrac{1}{3} < r < 1$; $u\big|_{r=\frac{1}{3}} = \cos^2\theta\cos 2\varphi + 2\sin^2\varphi$, $u\big|_{r=1} = 1+\cos\theta$.

8. УМФ 3курс 6 семестр 2 задание

1. Задача Коши в R^n $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Выписать формулу Пуассона для решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в R^n (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
2. Решить задачу Коши: $4u_t = \Delta u$, $(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$; $u\big|_{t=0} = xy + z^2$.
3. Решить задачу Коши: $u_t = 0.25\Delta u + \left(x^2 + 7x + 2y^2 - 3z^2 + 11\right)\cdot t$, $(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = x^3 e^{-y^2} \sin 2z$, $(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0; 1]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f(1)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + 4u + \cos t, \ t>0, \ 0<x<1, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_t\big|_{t=0} = g(x), \ u_x\big|_{x=0} = 0 = u_x\big|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} = u_{xx} + 39\pi e^{-t}\sin x$, $\left(t>0, \ 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$; $u\big|_{t=0} = 2x$, $\left(0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\right)$; $u_t\big|_{t=0} = 1-\cos 5x$, $\left(0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\right)$; $u_x\big|_{x=0} = 2$, $(t\ge 0)$; $u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi + t$, $(t\ge 0)$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r>2, \\ u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi, \ \|u\|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in \mathrm{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = \dfrac{18}{r^3}\sin 2\varphi$, $\dfrac{1}{2} < r < 1$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $u_r\big|_{r=\frac{1}{2}} = 28\sin^2\varphi$, $u_r\big|_{r=1} = 4\cos^2\varphi + 5$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле $u(r,\varphi,\theta)$ вне шара $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r>R, \\ u\big|_{r=R} = f(\varphi,\theta), \ \|u\|_{r=\infty} < \infty. \end{cases}$
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r>1, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \ \left(u - 2u_r\right)\big|_{r=1} = 1 + \sin\varphi\sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u = 12r$, $1<r<3$; $u\big|_{r=1} = 0$, $u\big|_{r=3} = \cos 2\theta\sin 2\varphi + (\sin\theta - 2\cos\varphi)\sin\varphi$.

9. УМФ 3курс 6 семестр 2 задание

1. Задача Коши в R^n $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Сформулировать принцип максимума для уравнения теплопроводности.
2. Решить задачу Коши в R^3: $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + \cos x, \ (x,y,z) \in \mathrm{R}^3, \ t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos y \cdot \cos z. \end{cases}$
3. Решить классическую задачу Коши: $u_t = 2\Delta u + xe^{8t-2x}$, $(t > 0, (x,y,z) \in \mathrm{R}^3)$;
   $u\big|_{t=0} = (x+z)^4 \cos y$, $((x,y,z) \in \mathrm{R}^3)$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0; 6\pi]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0) = 0$, $f'(6\pi) = 0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + F(x,t), \ t > 0, \ 0 < x < 2, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_t\big|_{t=0} = g(x), \ u_x\big|_{x=0} = 0 = u_x\big|_{x=2} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} = u_{xx} + u - xt + 2\cos x$, $t > 0$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$; $u\big|_{t=0} = 0$, $u_t\big|_{t=0} = \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$; $u_x\big|_{x=0} = t$, $u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}t$, $t \ge 0$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в R^3 и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 10, \\ (u + 3u_r)\big|_{r=10} = \cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить задачу: $\Delta u = 96x^2$, $(u - u_r)\big|_{r=1} = 12 \sin 2\varphi$, $r = \sqrt{x^2+y^2} < 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле $u(r,\varphi,\theta)$ в сферическом слое $\begin{cases} \Delta u = 0, \ R_1 < r < R_2, \\ u\big|_{r=R_1} = f_1(\varphi,\theta), \ u\big|_{r=R_2} = f_2(\varphi,\theta). \end{cases}$
2. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = 24xy$, $r < \dfrac{1}{2}$, $u\big|_{r=\frac{1}{2}} = \cos^2\vartheta - 2\sin\theta\cos\varphi + \dfrac{1}{16}\sin^4\vartheta \sin 2\varphi$.

✂ -

10. УМФ   3курс 6 семестр   2 задание

1. Задача Коши в R^n $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Поставить задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности в R^n (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
2. Решить задачу Коши: $9u_t = \Delta u$, $(x,y) \in \mathrm{R}^2$; $u\big|_{t=0} = (xy)^2$.
3. Решить классическую задачу Коши: $5u_t = \Delta u$, $\left(t > 0, (x,y,z) \in \mathrm{R}^3\right)$; $u\big|_{t=0} = \left(20x + z^5\right)e^{x-3y}$, $\left((x,y,z) \in \mathrm{R}^3\right)$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 2], удовлетворяющие условиям: $f(0) = 0$, $f(2) = 0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + F(x,t), \ t > 0, \ 0 < x < 2, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_t\big|_{t=0} = g(x), \ u\big|_{x=0} = 0 = u\big|_{x=2} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} = u_{xx} + u + \sin x - \dfrac{\pi}{2}xt$, $t > 0$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$; $u\big|_{t=0} = 0$, $u_t\big|_{t=0} = \left(\dfrac{\pi}{2} + 1\right)x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$; $u\big|_{x=0} = 0$, $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}t$, $t \ge 0$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в R^3 и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > 3, \\ u_r\big|_{r=3} = 2 - \sin^2\varphi, \ \|u\|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить задачу: $\Delta u = 24x$, $\left(2u + u_r\right)\big|_{r=1} = 20\sin^3\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для оператора Лапласа Δu в сферических координатах (r,φ,θ) ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$).
2. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \ u\big|_{r=R} = \cos\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\Delta u = 1$, $1 < r < 2$; $u\big|_{r=1} = 0$, $u\big|_{r=2} = 2\sin\theta\sin\varphi + \dfrac{2}{3}$.

11. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

1. Задача Коши в R^n $(n = 2{,}3)$ для уравнения теплопроводности

1. Выписать формулу Пуассона для решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в R^n (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
2. Решить задачу Коши: $u_t = 4\Delta u$, $(x,y)\in \mathrm{R}^2$; $u\big|_{t=0} = \sin\, x + \cos\, y$.
3. Решить классическую задачу Коши: $u_t = \Delta u + \left(x^2 + y^2 - 2z^2\right)\cos t$, $t > 0$, $(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $u\big|_{t=0} = e^{-y^2} \cdot \sin\,(x + z)$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 3], удовлетворяющие условиям: $f(0) = 0$, $f'(3) = 0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u\big|_{t=0} = f(x),\ u_x\big|_{x=0} = 0 = u\big|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} + 2u = u_{xx} + 2\cos^2 x$, $t > 0$, $0 < x < \pi$; $u\big|_{t=0} = x^2$, $u_t\big|_{t=0} = 1$, $0 \le x \le \pi$; $u_x\big|_{x=0} = 0$, $u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi$, $t \ge 0$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos^4 \varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить задачу: $\Delta u = 96y^2$, $(u + u_r)\big|_{r=1} = 20\,\sin\,2\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ находят методом разделения переменных $u(r,\varphi,\theta) = Z(r)Y(\varphi,\theta)$. Выписать дифференциальные уравнения для $Z(r)$ и $Y(\varphi,\theta)$.
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\Delta u = 12\left(x^2 - y^2\right)$, $1 < r < 2$; $u\big|_{r=1} = 2\sin\,2\vartheta\,\sin\,\varphi + \sin^4\vartheta\,\cos\,2\varphi$, $u\big|_{r=2} = -4\sin^2 2\theta\,\cos\,2\varphi$.

✂ -

12. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

1. Задача Коши в $\mathbb{R}^n$ $(n=2{,}3)$ для уравнения теплопроводности

1. Сформулировать принцип максимума для уравнения теплопроводности.
2. Решить задачу Коши в: $u_t = 4\Delta u$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; $u\big|_{t=0} = \sin x\cdot\cos y$.
3. Решить классическую задачу Коши: $u_t = \dfrac{1}{4}\Delta u + t^4(x+1)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = e^{2z-z^2}\cdot\sin(x+y)$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 3], удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f(3)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} 9u_{tt} = u_{xx},\ t>0,\ 0<x<3, \\ u\big|_{t=0} = f(x),\ u_x\big|_{x=0} = 0 = u\big|_{x=3} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} = 9u_{xx} + u - \pi(1+x) - \dfrac{3}{4}\sin\dfrac{x}{6}$, $t>0$, $0<x<3\pi$; $u\big|_{t=0} = \pi(1+x) + \sin\dfrac{x}{6}$, $u_t\big|_{t=0} = x$, $0\le x\le 3\pi$; $u\big|_{x=0} = \pi$, $u_x\big|_{x=3\pi} = \pi$, $t\ge 0$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r>2, \\ (u+2u_r)\big|_{r=2} = \cos^2\varphi,\ |u|\big|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить задачу: $\Delta u = 24y$, $(u+u_r)\big|_{r=1} = 16\cos^3\varphi$, $r=\sqrt{x^2+y^2}<1$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ находят методом разделения переменных $u(r,\varphi,\theta) = Z(r)Y(\varphi,\theta)$. Пусть $Y(\varphi,\theta) = \Phi(\varphi)X(\theta)$. Выписать уравнение для $\Phi(\varphi)$, решение для этого уравнения, уравнение для функции $X(\theta)$.
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r>R, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0,\ u\big|_{r=R} = \cos^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u = 6z$, $r<1$; $u\big|_{r=1} = 2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \cos^3\theta$.

13. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

1. Задача Коши в $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Поставить задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$ (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
2. Решить задачу Коши в: $4u_t = \Delta u$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $u\big|_{t=0} = e^x \cdot y^2$.
3. Решить классическую задачу Коши: $u_t = 5\Delta u + \dfrac{ch(4y-3z)\cos 5x}{(t+3)^2}$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = y\,ch\,(4y-3z)\cos 5x$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$, удовлетворяющие условиям: $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ 0 < x < \pi, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_t\big|_{t=0} = g(x), \ u\big|_{x=0} = 0 = u_x\big|_{x=\pi} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} = 6u_{xx} + 15u - 15xt + 9x^2(\pi - x)\sin 9t$, $x \in (0,\pi)$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = 2\sin x$, $u_t\big|_{t=0} = x - 3\sin x$, $0 \le x \le \pi$; $u\big|_{x=0} = 0$, $u\big|_{x=\pi} = \pi t$, $t \ge 0$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в R^3 и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ 1 < r < 2, \\ u\big|_{r=1} = \sin^2\varphi + \cos^3\varphi, \ u\big|_{r=2} = 0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить задачу Неймана: $\Delta u = 24(x^2 - y^2)$, $\left(r = \sqrt{x^2+y^2} < 1\right)$; $u_r\big|_{r=1} = 4\cos 2\varphi + 4\cos 4\varphi$, $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Дать определение полиномов Лежандра $P_n(\xi)$, $n = 0,1,2,\ldots$, выписать дифференциальное уравнение, которому они удовлетворяют, также вычислить $\int_{-1}^{1} P_n(\xi)P_m(\xi)d\xi$, $n \ne m$.
2. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$): $\Delta u = 12(x^2 - y^2)$, $\dfrac{1}{2} < r < 1$; $u_r\big|_{r=\frac{1}{2}} = 4 + \dfrac{1}{2}\sin^4\theta\cos 2\varphi$, $u_r\big|_{r=1} = 1 + 2\sin\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}\sin\varphi + 4\sin^4\theta\cos 2\varphi$.

14. УМФ 3курс 6 семестр 2 задание

1. Задача Коши в R^n $(n=2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Выписать формулу Пуассона для решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в R^n (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
2. Решить задачу Коши: $9u_t = \Delta u$, $(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$; $u\big|_{t=0} = x^2+y^2+z^2$.
3. Решить классическую задачу Коши: $2u_t = 3\Delta u + \sqrt{t+9}e^{-y}\cos z$, $(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = (2x+y+z)e^{-y}\cdot\cos z$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;\,2]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f'(2)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + 4u + \cos t, & t>0,\ 0<x<1, \\ u\big|_{t=0} = f(x),\ u_t\big|_{t=0} = g(x),\ u_x\big|_{x=0} = 0 = u_x\big|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} + 6u_t = 2u_{xx} - 5xe^{-t} + (2x-\pi)^2 e^{-4t}$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = x$, $u_t\big|_{t=0} = -x$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$; $u_x\big|_{x=0} = e^{-t}$, $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e^{-t}$, $t\ge 0$

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в R^3 и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0,\ 2<r<4, \\ u\big|_{r=2} = 0,\ u\big|_{r=4} = \varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in\mathrm{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу: $\Delta u = -\dfrac{\cos\varphi}{r^2}$, $\left(r=\sqrt{x^2+y^2}>1,\ 0\le\varphi\le 2\pi\right)$; $(u-u_r)\big|_{r=1} = 3\sin 2\varphi + 2\cos\varphi$, $(0\le\varphi\le 2\pi)$; $u(r,\varphi)$ - ограниченная функция при $r>1$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Дать определение полиномов Лежандра $P_n(\xi)$, $n=0,1,2,\ldots$ и присоединенных полиномов Лежандра $P_n^{(m)}(\xi)$, $m=0,1,2,\ldots,n$.
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r>R, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0,\ u\big|_{r=R} = \sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u = 0$, $1<r<2$, $u\big|_{r=1} = 2\sin^2\varphi + \cos 2\theta\cos 2\varphi$, $u\big|_{r=2} = 31\sin 2\theta\sin\varphi$.

15. УМФ 3курс 6 семестр 2 задание

1. Задача Коши в $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Сформулировать принцип максимума для уравнения теплопроводности.
2. Решить задачу Коши: $u_t = 2\Delta u$, $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$; $u\big|_{t=0} = \sin x + \sin y + \sin z$.
3. Решить классическую задачу Коши: $u_t = 3\Delta u + \dfrac{\cos(3x-4y)\operatorname{sh} 5z}{t+2}$, $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = x\cos(3x-4y)\operatorname{sh} 5z$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;\pi]$, удовлетворяющие условиям: $f(0)=0$, $f'(\pi)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + F(x,t),\ t>0,\ 0<x<2, \\ u\big|_{t=0} = f(x),\ u_t\big|_{t=0} = g(x),\ u_x\big|_{x=0} = 0 = u_x\big|_{x=2} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $2u_{tt} = 20u_{xx} + 13u - 5e^{-2t} + x(x^2-4\pi^2)\sin 4t$, $x\in(0,2\pi)$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = 3\sin\dfrac{x}{2}+1$, $u_t\big|_{t=0} = -2$, $0\le x\le 2\pi$; $u\big|_{x=0} = e^{-2t}$, $u\big|_{x=2\pi} = e^{-2t}$, $t\ge 0$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, r<2, \\ u\big|_{r=2} = 3+\sin\varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу: $\Delta u = 24xy$, $\left(r=\sqrt{x^2+y^2}<1\right)$; $(u+u_r)\big|_{r=1} = 2\sin\varphi - 3\sin 2\varphi$, $(0\le\varphi\le 2\pi)$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в сферических координатах находят методом разделения переменных $u(r,\varphi,\theta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n(r) Y_n(\varphi,\theta)$. Выписать формулы для $Z_n(r)$ и $Y_n(\varphi,\theta)$.
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<1, \\ (u+u_r)\big|_{r=1} = \sin\theta\cos\varphi + \sin^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u = 20$, $r<\sqrt{3}$, $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$, $u\big|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi$.

✂ -

16. УМФ 3курс 6 семестр 2 задание

1. Задача Коши в $\mathbb{R}^n$ $(n = 2{,}3)$ для уравнения теплопроводности

1. Поставить задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности в R^n (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
2. Решить задачу Коши: $u_t = 4\Delta u$, $(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$; $u\big|_{t=0} = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$
3. Решить классическую задачу Коши: $2u_t = 7\Delta u + \dfrac{\sin x \operatorname{sh} z}{\sqrt{t+4}}$, $(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = (x - 2y + z)\sin x \operatorname{ch} z$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;\,1]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f'(1)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + F(x,t),\ t>0,\ 0<x<2, \\ u\big|_{t=0} = f(x),\ u_t\big|_{t=0} = g(x),\ u\big|_{x=0} = 0 = u\big|_{x=2} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} + 10u_t = u_{xx} + 20x^2 - 4t + 12(\pi - 2x)e^{-8t}$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = 0$, $u_t\big|_{t=0} = 2x^2$, $0\le x\le \dfrac{\pi}{4}$; $u_x\big|_{x=0} = 0$, $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \pi t$, $t\ge 0$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r>1, \\ u_r\big|_{r=1} = \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right),\ |u|\big|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in\mathrm{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу: $\Delta u = -2\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$, $\left(r=\sqrt{x^2+y^2}>1,\ 0\le\varphi\le 2\pi\right)$; $(u - u_r)\big|_{r=1} = 16\sin^3\varphi$, $(0\le\varphi\le 2\pi)$; $u(r,\varphi)$ - ограниченная функция при $r>1$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле $u(r,\varphi,\theta)$ внутри шара $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<R, \\ u\big|_{r=R} = f(\varphi,\theta). \end{cases}$
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r>1, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0,\ (u - 2u_r)\big|_{r=1} = 1 + \sin\varphi\sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u = 0$, $1<r<2$, $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$, $u_r\big|_{r=1} = 5\sin^2\theta\cos^2\varphi$, $u\big|_{r=2} = -\dfrac{5}{6} - \dfrac{5}{2}\cos 2\theta$.

17. УМФ 3курс 6 семестр 2 задание

1. Задача Коши в R^n $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Выписать формулу Пуассона для решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в R^n (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
2. Решить задачу Коши: $4u_t = \Delta u$, $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$; $u\big|_{t=0} = xy + z^2$.
3. Решить классическую задачу Коши: $u_t = 2\Delta u + xy$, $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = z^3\cdot \sin(x-2y)$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;1]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f(1)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_t = a^2u_{xx},\ t>0,\ 0<x<1, \\ u\big|_{t=0} = f(x),\ u_x\big|_{x=0} = 0 = u\big|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} = 4u_{xx} + \sin 3x$, $x\in(0,\pi)$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = x\sin x$, $u_t\big|_{t=0} = 1-x$, $u\big|_{x=0} = t$, $u\big|_{x=\pi} = t(1-\pi)$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в R^3 и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<R, \\ (u+2u_r)\big|_{r=R} = 2\cos\varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = 20r^2\sin 6\varphi$, $r<1$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$; $(3u+u_r)\big|_{r=1} = 11\sin 6\varphi - 5\cos 7\varphi + 3$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для решения задачи Дирихле $u(r,\varphi,\theta)$ вне шара $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r>R, \\ u\big|_{r=R} = f(\varphi,\theta),\ |u|\big|_{r=\infty} < \infty. \end{cases}$
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<R, \\ u\big|_{r=R} = \cos\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u = \dfrac{1}{r^4}$, $r>2$, $u(\infty)=0$, $(u-u_r)\big|_{r=2} = \sin\theta\cdot\cos^2\dfrac{\theta}{2}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\varphi\right)$.

✂ -

18. УМФ 3курс 6 семестр **2 задание**

1. Задача Коши в R^n $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Сформулировать принцип максимума для уравнения теплопроводности.
2. Решить задачу Коши в R^3: $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + \cos x, \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos y \cdot \cos z. \end{cases}$
3. Решить классическую задачу Коши: $3u_t = \Delta u + (z^2 - x^2)t$, $(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = (y^4 + 6z^2 y)e^{3x}$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0; 6\pi]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0) = 0$, $f'(6\pi) = 0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} 9u_{tt} = u_{xx}, \ t > 0, \ 0 < x < 3, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_x\big|_{x=0} = 0 = u\big|_{x=3} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = u_{xx} + x^2$, $x \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = 2x^2 - x$, $u_x\big|_{x=0} = 0$, $u_x\big|_{x=\frac{1}{4}} = \dfrac{t}{2}$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в R^3 и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > 2, \\ u\big|_{r=2} = \cos^2 \varphi, \ |u|\big|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = \dfrac{3}{r^4}\cos\varphi$, $r > 1$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $(4u - u_r)\big|_{r=1} = \cos\varphi + 24\sin 4\varphi$, $|u(\infty)| < \infty$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в R^3 и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \ u\big|_{r=R} = \cos\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = \dfrac{3}{r^5}$, $\dfrac{1}{2} < r < 1$; $u\big|_{r=\frac{1}{2}} = 2\cos^2\varphi - \cos 2\theta \cos 2\varphi$, $u_r\big|_{r=1} = \sin 2\theta \sin\varphi$.

19. УМФ 3курс 6 семестр 1 задание

1. Задача Коши в R^n $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Поставить задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности в R^n (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
2. Решить задачу Коши: $9u_t = \Delta u$, $(x, y) \in R^2$; $u\big|_{t=0} = (xy)^2$.
3. Решить классическую задачу Коши: $u_t = \Delta u + 27(t^2 - 1)\cos(x + y + z)$, $(x, y, z) \in R^3$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = (x - y + z)\sin z$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$, удовлетворяющие условиям: $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ 0 < x < \pi, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_t\big|_{t=0} = g(x), \ u\big|_{x=0} = 0 = u_x\big|_{x=\pi} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} = 9u_{xx} + 18x\cos x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = \sin x$, $u_t\big|_{t=0} = 2x + 1$, $u\big|_{x=0} = t$, $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2t$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 10, \\ (u + 3u_r)\big|_{r=10} = \cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in R^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = r^3 \sin 3\varphi$, $r < 1$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $(u + 3u_r)\big|_{r=1} = 11\sin 3\varphi + 5\cos 8\varphi - 3$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для оператора Лапласа Δu в сферических координатах (r, φ, θ) ($(x, y, z) \in R^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$).
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in R^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in R^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = 6r^3$, $1 < r < 2$; $u\big|_{r=1} = (\cos 2\theta - 1)\sin^2\varphi + \sin^2\theta$, $u_r\big|_{r=2} = 15 + \sin\theta\cos\varphi$.

20. УМФ   3курс 6 семестр   1 задание

1. Задача Коши в $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Выписать формулу Пуассона для решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$ (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).
2. Решить задачу Коши: $u_t = 4\Delta u$, $(x,y)\in \mathbb{R}^2$; $u|_{t=0} = \sin x + \cos y$.
3. Решить классическую задачу Коши: $u_t = \Delta u + (5t^2 + 2t + 5)\sin(x - 2z)$, $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$, $t>0$; $u|_{t=0} = (x + y + z)\cos y$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 2], удовлетворяющие условиям: $f(0)=0$, $f(2)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + 4u + \cos t, \ t>0, \ 0<x<1, \\ u|_{t=0} = f(x), \ u_t|_{t=0} = g(x), \ u_x|_{x=0} = 0 = u_x|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 16u_{xx} + 4x^2 + 2x$, $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, $t>0$; $u|_{t=0} = 2\cos(\pi x)$, $u_x|_{x=0} = 2t$, $u|_{x=\frac{1}{2}} = 2t$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Степень неединственности решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r>3, \\ u_r|_{r=3} = 2 - \sin^2\varphi, \ \left.|u|\right|_{r=\infty} < \infty \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = \dfrac{3}{r^4}\cos\varphi$, $r>1$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$; $(4u - u_r)|_{r=1} = \cos\varphi + 24\sin 4\varphi$, $|u(\infty)|<\infty$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ находят методом разделения переменных $u(r,\varphi,\theta) = Z(r)Y(\varphi,\theta)$. Выписать дифференциальные уравнения для $Z(r)$ и $Y(\varphi,\theta)$.
2. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r>R, \\ |u| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \ u|_{r=R} = \cos^2\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$): $\Delta u = \dfrac{6}{r}$, $\dfrac{1}{3}<r<1$; $u|_{r=\frac{1}{3}} = \cos^2\theta\cos 2\varphi + 2\sin^2\varphi$, $u|_{r=1} = 1 + \cos\theta$.

✂ -

21. УМФ 3курс 6 семестр 1 задание

1. Задача Коши в Rn $(n = 2,3)$ для уравнения теплопроводности

1. Сформулировать принцип максимума для уравнения теплопроводности.
2. Решить задачу Коши в: $u_t = 4\Delta u$, $(x, y) \in \mathrm{R}^2$; $u\big|_{t=0} = \sin x \cdot \cos y$.
3. Решить классическую задачу Коши: $u_t - \Delta u = \mathrm{ch}(x - y + 2z + 6t)$, $(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $t > 0$; $u\big|_{t=0} = x^2 y^2 z^2$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 3], удовлетворяющие условиям: $f(0) = 0$, $f'(3) = 0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + F(x,t), \ t > 0, \ 0 < x < 2, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_t\big|_{t=0} = g(x), \ u_x\big|_{x=0} = 0 = u_x\big|_{x=2} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 4u_{xx} + 9u - 27\pi x(x - 2\pi) - \dfrac{9}{2\pi}(x + 2\pi)$, $t > 0$, $0 < x < 2\pi$; $u\big|_{t=0} = 1 + \sin x + \dfrac{x}{2\pi}$, $0 \le x \le 2\pi$; $u\big|_{x=0} = 1$, $u\big|_{x=2\pi} = 2$, $t \ge 0$.

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в R^3 и указать, при каких условиях она имеет решение.
2. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos^4 \varphi \end{cases}$ записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathrm{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
3. Решить краевую задачу $\Delta u = 24y$, $\dfrac{1}{3} < r < 1$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $u_r\big|_{r=\frac{1}{3}} = 12\cos^2\varphi$, $u\big|_{r=1} = 9\cos 2\varphi + 12\sin\varphi$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ находят методом разделения переменных $u(r,\varphi,\theta) = Z(r)Y(\varphi,\theta)$. Пусть $Y(\varphi,\theta) = \Phi(\varphi)X(\theta)$. Выписать уравнение для $\Phi(\varphi)$, решение для этого уравнения, уравнение для функции $X(\theta)$.
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u\big|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\Delta u = 12r$, $1 < r < 3$; $u\big|_{r=1} = 0$, $u\big|_{r=3} = \cos 2\theta \sin 2\varphi + (\sin\theta - 2\cos\varphi)\sin\varphi$.