# 1. УМФ   3курс 6 семестр **1 задание**

### 1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 2], удовлетворяющие условиям: $f(0)=0$, $f(2)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \ t>0, \ 0<x<\pi, \\ u\big|_{t=0}=f(x), \ u_t\big|_{t=0}=g(x), \ u\big|_{x=0}=0=u_x\big|_{x=\pi} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt}=u_{xx}+x^2-\pi x$, $0<x<\pi$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=x$, $u_t\big|_{t=0}=-1$, $0\le x\le\pi$; $u\big|_{x=0}=-t$, $u\big|_{x=\pi}=\pi-t$, $t\ge 0$.

### 2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_0(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta u, \ t>0, \ r<1, \\ u\big|_{r=1}=0, \ u\big|_{t=0}=r^2\sin\varphi, \ u_t\big|_{t=0}=0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Найти решение смешанной задачи $u_t=2\Delta u+J_1\left(2\mu_5^{(1)}r\right)\cos\varphi\cos t$, $r<\dfrac{1}{2}$, $t>0$, $u=u(r,\varphi,t)$; $u\big|_{t=0}=f(r)(4\cos\varphi-3)$, $u\big|_{r=\frac{1}{2}}=0$, $\left|u\big|_{r=0}\right|<\infty$, где $f(r)$ – гладкая на $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ – $j$-й по порядку положительный нуль функции Бесселя $J_k$, $k=0,1,2,\ldots$; $j=1,2,3,\ldots$; $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

### 3. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathbb{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathbb{R}^3$: полупространство $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u=-f(x) & x_3>0 \\ u\big|_{x_3=0}=u_0(x) & \end{array}\right.$ для непрерывных и ограниченных $f(x)$ и $u_0(x)$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 2. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

**1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.**

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 3], удовлетворяющие условиям: $f(0)=0$, $f'(3)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}+4u+\cos t, \ t>0, \ 0<x<1, \\ u\big|_{t=0}=f(x), \ u_t\big|_{t=0}=g(x), \ u_x\big|_{x=0}=0=u_x\big|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=u_{xx}+2x$, $0<x<\pi$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=0$, $0\le x\le \pi$; $u_x\big|_{x=0}=t$, $u_x\big|_{x=\pi}=t$, $t\ge 0$.

**2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.**

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_1(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} 4u_{tt}=\Delta u, \ t>0, \ r<1, \\ u\big|_{r=1}=0, \ u\big|_{t=0}=J_0\left(\mu_1^{(0)}r\right), \ u_t\big|_{t=0}=0, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Найти решение смешанной задачи $u_{tt}=\Delta u+J_2\left(\mu_4^{(2)}r\right)\cos 2\varphi \cos\left(\mu_4^{(2)}t\right)$, $r<1$, $t>0$, $u=u(r,\varphi,t)$; $u\big|_{t=0}=f(r)\sin\varphi$, $u_t\big|_{t=0}=J_2\left(\mu_4^{(2)}r\right)\cos 2\varphi$, $u\big|_{r=1}=0$, $\left|u\big|_{r=0}\right|<\infty$, где $f(r)$ – гладкая на $[0,1]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ – $j$-й по порядку положительный нуль функции Бесселя $J_k$, $k=0,1,2,\ldots$; $j=1,2,3,\ldots$; $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

**3. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathbb{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathbb{R}^3$: восьмая часть шара $|x|<R$, $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u=-f(x) & |x|<R \\ u\big|_{|x|=R}=u_0(x) & \end{array}\right.$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 3. УМФ   3курс 6 семестр   **1 задание**

**1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.**

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{6}\right]$, удовлетворяющие условиям: $f(0)=0$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases}4u_{tt}=u_{xx}+F(x,t),\ t>0,\ 0<x<2,\\ u\big|_{t=0}=f(x),\ u_t\big|_{t=0}=g(x),\ u_x\big|_{x=0}=0=u_x\big|_{x=2}\end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt}=u_{xx}+(0.5\pi-5x)\cdot\cos 2t$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=x$, $u_t\big|_{t=0}=0$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$; $u_x\big|_{x=0}=\cos 2t$, $u\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0.5\pi\cdot\cos 2t$, $t\ge 0$.

**2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.**

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_2(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases}u_t=4\Delta u,\ t>0,\ r<2,\\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0}=J_1\left(\mu_2^{(1)}\dfrac{r}{2}\right)\sin\varphi,\end{cases}$ $\mu_2^{(1)}$ - положительный ноль функции $J_1(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Найти решение смешанной задачи $u_t=4\Delta u+J_2\left(\mu_3^{(2)}r\right)\sin 2\varphi\sin 2t$, $r<1$, $t>0$, $u=u(r,\varphi,t)$; $u\big|_{t=0}=f(r)(3\sin 2\varphi-4)$, $u\big|_{r=1}=0$, $\left|u\big|_{r=0}\right|<\infty$, где $f(r)$ – гладкая на $[0,1]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ – $j$-й по порядку положительный нуль функции Бесселя $J_k$, $k=0,1,2,\ldots$; $j=1,2,3,\ldots$; $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

**3. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $R^3$: четверть шара $|x|<R,\ x_2>0$, $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{ll}\Delta u=0, & x_3>0,\\ u\big|_{x_3=0}=\theta(x_2-x_1). & \end{array}\right.$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 4. УМФ   3курс 6 семестр   **2 задание**

## 1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 3], удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f(3)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt}=9u_{xx}+F(x,t), \ t>0, \ 0<x<2, \\ u\big|_{t=0}=f(x), \ u_t\big|_{t=0}=g(x), \ u\big|_{x=0}=0=u\big|_{x=2} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=u_{xx}+1+x$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=\pi x$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$; $u\big|_{x=0}=t$, $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\pi$, $t\ge 0$.

## 2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_3(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt}=\Delta u, \ t>0, \ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0, u\big|_{t=0}=J_0\left(\mu_1^{(0)}\dfrac{r}{2}\right), u_t\big|_{t=0}=J_2\left(\mu_1^{(2)}\dfrac{r}{2}\right)\cos 2\varphi, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, $\mu_1^{(2)}$ - положительный ноль функции $J_2(x)$,записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Найти решение смешанной задачи $u_{tt}=\Delta u+J_1\left(2\mu_4^{(1)}r\right)\sin\varphi\sin\left(2\mu_4^{(1)}t\right)$, $r<\dfrac{1}{2}$, $t>0$, $u=u(r,\varphi,t)$; $u\big|_{t=0}=0$, $u_t\big|_{t=0}=f(r)\cos 2\varphi$, $u\big|_{r=\frac{1}{2}}=0$, $\left|u\big|_{r=0}\right|<\infty$, где $f(r)$ – гладкая на $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ – $j$-й по порядку положительный нуль функции Бесселя $J_k$, $k=0,1,2,\ldots$; $j=1,2,3,\ldots$; $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

## 3. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $R^3$: двугранный угол $x_2>0$, $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u=0, & |x|<R, \\ u\big|_{|x|=R}=1. & \end{array}\right.$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**5. УМФ** 3курс 6 семестр **1 задание**

**1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.**

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;2]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f'(2)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ t>0, \ 0<x<1, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_x\big|_{x=0} = 0 = u\big|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = u_{xx} + 1 + x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = \pi x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$; $u\big|_{x=0} = t$, $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi$, $t \ge 0$.

**2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.**

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_4(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \ t>0, \ r<1, \\ u\big|_{r=1} = 0, \ u\big|_{t=0} = r^2 \sin\varphi, \ u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = \Delta u + J_1(r)\sin\varphi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r < \mu_1^{(1)}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = J_1(r)\cos 2\varphi$, $r \le \mu_1^{(1)}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$; $u\big|_{r=\mu_1^{(1)}} = 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $t \ge 0$, где $\mu_1^{(1)}$ - минимальный положительный корень функции Бесселя $J_1(r)$.

**3. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathbb{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Пользуясь методом отражений построить функцию Грина для части пространства, заключенного между параллельными плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x| < R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u = -a = const, \quad |x| < R, \\ u\big|_{|x|=R} = 0. \end{array}\right.$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 6. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

## 1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;\pi]$, удовлетворяющие условиям: $f(0)=0$, $f'(\pi)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} 9u_{tt}=u_{xx},\ t>0,\ 0<x<3, \\ u\big|_{t=0}=f(x),\ u_x\big|_{x=0}=0=u\big|_{x=3} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt}=3u_{xx}+3u-3tx-6t+9\pi\sin t\sin\dfrac{x}{2}$, $(t>0,\ 0<x<\pi)$; $u\big|_{t=0}=0$, $(0\le x\le\pi)$; $u_t\big|_{t=0}=2+x$, $(0\le x\le\pi)$; $u\big|_{x=0}=2t$, $(t\ge 0)$; $u\big|_{x=\pi}=2t+\pi t$, $(t\ge 0)$.

## 2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_5(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} 4u_{tt}=\Delta u,\ t>0,\ r<1, \\ u\big|_{r=1}=0,\ u\big|_{t=0}=J_0\left(\mu_1^{(0)}r\right),\ u_t\big|_{t=0}=0, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=4\Delta u-tJ_3(r)\cos 3\varphi$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r<\mu_1^{(3)}$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=\dfrac{1}{16}J_3(r)\cos 3\varphi+J_2\left(\dfrac{\mu_1^{(2)}}{\mu_1^{(3)}}r\right)\sin 2\varphi$, $r\le\mu_1^{(3)}$, $0\le\varphi\le 2\pi$; $u\big|_{r=\mu_1^{(3)}}=0$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $t\ge 0$, где $\mu_1^{(2)}>0$, $\mu_1^{(3)}>0$ - корни функций Бесселя $J_2(r)$ и $J_3(r)$ соответственно.

## 3. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $R^3$: полушар $|x|<R,\ x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{l} \Delta u=-f(x),\quad x_3>0, \\ u\big|_{x_3=0}=u_0(x). \end{array}\right.$ для непрерывных и ограниченных $f(x)$ и $u_0(x)$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 7. УМФ  3курс 6 семестр  **2 задание**

### 1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;1]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f'(1)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx},\ t>0,\ 0<x<\pi, \\ u\big|_{t=0}=f(x),\ u_t\big|_{t=0}=g(x),\ u\big|_{x=0}=0=u_x\big|_{x=\pi} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt}=u_{xx}+5u-5tx-5t+9\pi e^{-t}\sin 2x$, $\left(t>0,\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$; $u\big|_{t=0}=0$, $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$; $u_t\big|_{t=0}=1+x$, $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$; $u\big|_{x=0}=t$, $(t\ge 0)$; $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=t$, $(t\ge 0)$.

### 2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_6(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_t=4\Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0}=J_1\left(\mu_2^{(1)}\dfrac{r}{2}\right)\sin\varphi, \end{cases}$ $\mu_2^{(1)}$ - положительный ноль функции $J_1(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=\Delta u+J_1(r)\cos 2\varphi$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r<\mu_1^{(1)}$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=J_1(r)\sin\varphi$, $r\le\mu_1^{(1)}$, $0\le\varphi\le 2\pi$; $u\big|_{r=\mu_1^{(1)}}=0$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $t\ge 0$, где $\mu_1^{(1)}$ - минимальный положительный корень функции Бесселя $J_1(r)$.

### 3. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathbb{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathbb{R}^3$: октант $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u=-f(x),\quad |x|<R, \\ u\big|_{|x|=R}=u_0(x). \end{array}\right.$

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 8. УМФ   3курс 6 семестр   **1 задание**

## 1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;1]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f(1)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}+4u+\cos t, & t>0,\ 0<x<1, \\ u|_{t=0}=f(x),\ u_t|_{t=0}=g(x),\ u_x|_{x=0}=0=u_x|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt}=u_{xx}+39\pi e^{-t}\sin x$, $\left(t>0,\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$; $u|_{t=0}=2x$, $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$; $u_t|_{t=0}=1-\cos 5x$, $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$; $u_x|_{x=0}=2$, $(t\ge 0)$; $u|_{x=\frac{\pi}{2}}=\pi+t$, $(t\ge 0)$.

## 2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_7(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt}=\Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u|_{r=2}=0,\ u|_{t=0}=J_0\left(\mu_1^{(0)}\dfrac{r}{2}\right),\ u_t|_{t=0}=J_2\left(\mu_1^{(2)}\dfrac{r}{2}\right)\cos 2\varphi, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, $\mu_1^{(2)}$ - положительный ноль функции $J_2(x)$,записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=9\Delta u-tJ_2(r)\sin 2\varphi+J_4\left(\dfrac{\mu_1^{(4)}}{\mu_1^{(2)}}r\right)\cos 4\varphi$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r<\mu_1^{(2)}$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $t>0$; $u|_{t=0}=\dfrac{1}{81}J_2(r)\sin\ 2\varphi$, $r<\mu_1^{(2)}$, $0\le\varphi\le 2\pi$; $u|_{r=\mu_1^{(2)}}=0$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $t\ge 0$, где $\mu_1^{(2)}>0$, $\mu_1^{(4)}>0$ - корни функций Бесселя $J_2(r)$ и $J_4(r)$ соответственно.

## 3. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathbb{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathbb{R}^3$: шар $|x|<R$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u=0, & x_3>0, \\ u|_{x_3=0}=\theta(x_2-x_1). & \end{array}\right.$.

# 9. УМФ    3курс 6 семестр    **1 задание**

**1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.**

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;\,6\pi]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f'(6\pi)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} 4u_{tt}=u_{xx}+F(x,t),\ t>0,\ 0<x<2, \\ u\big|_{t=0}=f(x),\ u_t\big|_{t=0}=g(x),\ u_x\big|_{x=0}=0=u_x\big|_{x=2} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt}=u_{xx}+u-xt+2\cos x$, $t>0$, $0<x<\frac{\pi}{2}$; $u\big|_{t=0}=0$, $u_t\big|_{t=0}=\frac{\pi}{2}$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$; $u_x\big|_{x=0}=t$, $u\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}t$, $t\ge 0$.

**2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.**

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_8(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta u,\ t>0,\ r<1, \\ u\big|_{r=1}=0,\ u\big|_{t=0}=r^2\sin\varphi,\ u_t\big|_{t=0}=0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=9\Delta u-2u+J_2\left(\frac{\mu_3^{(2)}}{2}r\right)\cos 2\varphi$, $(t>0, r<2, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{t=0}=f(r)\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$, $(r\le 2, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{r=2}=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $f(r)\in C^1[0,2]$, $f(2)=0$, $\mu_3^{(2)}$ - положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_2(\xi)$.

**3. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $R^3$: полупространство $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u=0,\quad |x|<R, \\ u\big|_{|x|=R}=1. \end{array}\right.$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**10. УМФ** 3курс 6 семестр **1 задание**

## 1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 2], удовлетворяющие условиям: $f(0)=0$, $f(2)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt}=9u_{xx}+F(x,t), \ t>0, \ 0<x<2, \\ u\big|_{t=0}=f(x), \ u_t\big|_{t=0}=g(x), \ u\big|_{x=0}=0=u\big|_{x=2} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt}=u_{xx}+u+\sin x-\dfrac{\pi}{2}xt$, $t>0$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$; $u\big|_{t=0}=0$, $u_t\big|_{t=0}=\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)x$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$; $u\big|_{x=0}=0$, $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}t$, $t\ge 0$.

## 2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_9(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} 4u_{tt}=\Delta u, \ t>0, \ r<1, \\ u\big|_{r=1}=0, \ u\big|_{t=0}=J_0\left(\mu_1^{(0)}r\right), \ u_t\big|_{t=0}=0, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=4\Delta u-u+e^{-t}f(r)\sin\left(3\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $(t>0, r<5, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{t=0}=J_3\left(\dfrac{\mu_2^{(3)}}{5}r\right)\sin 3\varphi$, $(r\le 5, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{r=5}=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $f(r)\in C^1[0,5]$, $f(5)=0$, $\mu_2^{(3)}$ - положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_3(\xi)$.

## 3. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathbb{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathbb{R}^3$: восьмая часть шара $|x|<R$, $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\begin{cases} \Delta u=-a=const, & |x|<R, \\ u\big|_{|x|=R}=0. \end{cases}$.

**11. УМФ** 3курс 6 семестр **1 задание**

1. **Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.**

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 3], удовлетворяющие условиям: $f(0)=0$, $f'(3)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ t>0,\ 0<x<1, \\ u\big|_{t=0} = f(x),\ u_x\big|_{x=0} = 0 = u\big|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} + 2u = u_{xx} + 2\cos^2 x$, $t>0$, $0<x<\pi$; $u\big|_{t=0} = x^2$, $u_t\big|_{t=0} = 1$, $0 \le x \le \pi$; $u_x\big|_{x=0} = 0$, $u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi$, $t \ge 0$.

2. **Метод Фурье с применением функций Бесселя.**

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{10}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_t = 4\Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2} = 0,\ u\big|_{t=0} = J_1\left(\mu_2^{(1)} \dfrac{r}{2}\right)\sin\varphi, \end{cases}$ $\mu_2^{(1)}$ - положительный ноль функции $J_1(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 9\Delta u - 2u + e^{-2t} J_1\left(\dfrac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)\sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $(t>0, r<2, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{t=0} = f(r)\sin\varphi$, $(r\le 2, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{r=2} = 0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $f(r)\in C^1[0,2]$, $f(2)=0$, $\mu_3^{(1)}$ - положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_2(\xi)$.

3. **Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $R^3$: четверть шара $|x| < R$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{l} \Delta u = -f(x),\quad x_3>0, \\ u\big|_{x_3=0} = u_0(x). \end{array}\right.$ для непрерывных и ограниченных $f(x)$ и $u_0(x)$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 12. УМФ   3курс 6 семестр   **1 задание**

**1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.**

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 3], удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f(3)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} 9u_{tt}=u_{xx},\ t>0,\ 0<x<3, \\ u\big|_{t=0}=f(x),\ u_x\big|_{x=0}=0=u\big|_{x=3} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt}=9u_{xx}+u-\pi(1+x)-\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{x}{6}$, $t>0$, $0<x<3\pi$; $u\big|_{t=0}=\pi(1+x)+\sin\dfrac{x}{6}$, $u_t\big|_{t=0}=x$, $0\le x\le 3\pi$; $u\big|_{x=0}=\pi$, $u_x\big|_{x=3\pi}=\pi$, $t\ge 0$.

**2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.**

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{11}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt}=\Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0}=J_0\left(\mu_1^{(0)}\dfrac{r}{2}\right),\ u_t\big|_{t=0}=J_2\left(\mu_1^{(2)}\dfrac{r}{2}\right)\cos 2\varphi, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, $\mu_1^{(2)}$ - положительный ноль функции $J_2(x)$,записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=4\Delta u-2u+f(r)\sin 5\varphi$, $(t>0, r<3, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{t=0}=J_5\left(\dfrac{\mu_1^{(5)}}{3}r\right)\sin\left(5\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $(r\le 3, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $u\big|_{r=3}=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r=0$, $(t\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi)$; $f(r)\in C^1[0,3]$, $f(3)=0$, $\mu_1^{(3)}$ - положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_5(\xi)$.

**3. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $R^3$: двугранный угол $x_2>0$, $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\begin{cases} \Delta u=-f(x),\ |x|<R, \\ u\big|_{|x|=R}=u_0(x). \end{cases}$

# 13. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

## 1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$, удовлетворяющие условиям: $f(0)=0$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \ t>0, \ 0<x<\pi, \\ u\big|_{t=0}=f(x), \ u_t\big|_{t=0}=g(x), \ u\big|_{x=0}=0=u_x\big|_{x=\pi} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt}=6u_{xx}+15u-15xt+9x^2(\pi-x)\sin 9t$, $x\in(0,\pi)$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=2\sin x$, $u_t\big|_{t=0}=x-3\sin x$, $0\le x\le\pi$; $u\big|_{x=0}=0$, $u\big|_{x=\pi}=\pi t$, $t\ge 0$.

## 2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{12}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta u, \ t>0, \ r<1, \\ u\big|_{r=1}=0, \ u\big|_{t=0}=r^2\sin\varphi, \ u_t\big|_{t=0}=0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=4\Delta u-u+J_2\left(\mu_3^{(2)}r\right)\cos 2\varphi$, $r<1$, $t>0$, $u=u(r,\varphi,t)$, $u\big|_{t=0}=f(r)(2\cos 2\varphi-3)$, $u\big|_{r=1}=0$, $\left|u\big|_{r=0}\right|<\infty$, где $f(r)$ – гладкая на [0,1] функция, $\mu_3^{(2)}$ - положительный нуль функции Бесселя $J_2$, $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

## 3. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Пользуясь методом отражений построить функцию Грина для части пространства, заключенного между параллельными плоскостями $x_3=0$ и $x_3=1$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u=0, & x_3>0, \\ u\big|_{x_3=0}=\theta(x_2-x_1). & \end{array}\right.$.

# 14. УМФ  3курс 6 семестр  **1 задание**

## 1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;\,2]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f'(2)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}+4u+\cos t, \ t>0, \ 0<x<1, \\ u\big|_{t=0}=f(x), \ u_t\big|_{t=0}=g(x), \ u_x\big|_{x=0}=0=u_x\big|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt}+6u_t=2u_{xx}-5xe^{-t}+(2x-\pi)^2e^{-4t}$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=x$, $u_t\big|_{t=0}=-x$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$; $u_x\big|_{x=0}=e^{-t}$, $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=e^{-t}$, $t\ge 0$

## 2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{13}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} 4u_{tt}=\Delta u, \ t>0, \ r<1, \\ u\big|_{r=1}=0, \ u\big|_{t=0}=J_0\left(\mu_1^{(0)}r\right), \ u_t\big|_{t=0}=0, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=9\Delta u-2u+f(r)\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $r<2$, $t>0$, $u=u(r,\varphi,t)$, $u\big|_{t=0}=f(r)\cos 3\varphi+2J_1\left(\dfrac{\mu_3^{(1)}}{2}r\right)\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $u\big|_{r=2}=0$, где $f(r)$ – гладкая на $[0,2]$ функция, $\mu_3^{(1)}$ - положительный нуль функции Бесселя $J_1$, $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

## 3. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $R^3$: полушар $|x|<R$, $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u=0 & |x|<R \\ u\big|_{|x|=R}=1 & \end{array}\right.$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

## 15. УМФ    3курс 6 семестр    **1 задание**

**1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.**

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;\pi]$, удовлетворяющие условиям: $f(0)=0$, $f'(\pi)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} 4u_{tt}=u_{xx}+F(x,t),\ t>0,\ 0<x<2, \\ u\big|_{t=0}=f(x),\ u_t\big|_{t=0}=g(x),\ u_x\big|_{x=0}=0=u_x\big|_{x=2} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $2u_{tt}=20u_{xx}+13u-5e^{-2t}+x\left(x^2-4\pi^2\right)\sin 4t$, $x\in(0,2\pi)$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=3\sin\dfrac{x}{2}+1$, $u_t\big|_{t=0}=-2$, $0\le x\le 2\pi$; $u\big|_{x=0}=e^{-2t}$, $u\big|_{x=2\pi}=e^{-2t}$, $t\ge 0$.

**2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.**

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{14}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_t=4\Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0}=J_1\left(\mu_2^{(1)}\dfrac{r}{2}\right)\sin\varphi, \end{cases}$ $\mu_2^{(1)}$ - положительный ноль функции $J_1(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=5\Delta u-3u+J_3\left(\dfrac{1}{4}\mu_2^{(3)}r\right)\cos 3\varphi+f(r)\sin 2\varphi$, $r<4$, $t>0$, $u=u(r,\varphi,t)$, $u\big|_{t=0}=f(r)\cos 3\varphi$, $u\big|_{r=4}=0$, $\left|u\big|_{r=0}\right|<\infty$, где $f(r)$ – гладкая на [0,4] функция, $\mu_2^{(3)}$ - положительный нуль функции Бесселя $J_3$, $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

**3. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathbb{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathbb{R}^3$: октант $x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u=-a=const\ |x|<R \\ u\big|_{|x|=R}=0 \end{array}\right.$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 16. УМФ  3курс 6 семестр  **1 задание**

### 1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;\,1]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f'(1)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt}=9u_{xx}+F(x,t), \ t>0, \ 0<x<2, \\ u\big|_{t=0}=f(x), \ u_t\big|_{t=0}=g(x), \ u\big|_{x=0}=0=u\big|_{x=2} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt}+10u_t=u_{xx}+20x^2-4t+12(\pi-2x)e^{-8t}$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=0$, $u_t\big|_{t=0}=2x^2$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$; $u_x\big|_{x=0}=0$, $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\pi t$, $t\ge 0$.

### 2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{15}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt}=\Delta u, \ t>0, \ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0, \ u\big|_{t=0}=J_0\left(\mu_1^{(0)}\dfrac{r}{2}\right), \ u_t\big|_{t=0}=J_2\left(\mu_1^{(2)}\dfrac{r}{2}\right)\cos 2\varphi, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, $\mu_1^{(2)}$ - положительный ноль функции $J_2(x)$,записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=3\Delta u-2u+f(r)\left(\cos\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin 3\varphi\right)$, $r<3$, $t>0$, $u=u(r,\varphi,t)$, $u\big|_{t=0}=2J_3\left(\dfrac{\mu_2^{(3)}}{3}r\right)\sin 3\varphi$, $u\big|_{r=2}=0$, $\left|u\big|_{r=0}\right|<\infty$, где $f(r)$ – гладкая на [0,3] функция, $\mu_2^{(3)}$ - положительный нуль функции Бесселя $J_3$, $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

### 3. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $R^3$: шар $|x|<R$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{l} \Delta u=-f(x) \ x_3>0 \\ u\big|_{x_3=0}=u_0(x) \end{array}\right.$ для непрерывных и ограниченных $f(x)$ и $u_0(x)$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 17. УМФ   3курс 6 семестр   **1 задание**

### 1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0;1]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f(1)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ t>0, \ 0<x<1, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_x\big|_{x=0} = 0 = u\big|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} = 4u_{xx} + \sin 3x$, $x \in (0,\pi)$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = x\sin x$, $u_t\big|_{t=0} = 1-x$, $u\big|_{x=0} = t$, $u\big|_{x=\pi} = t(1-\pi)$.

### 2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{16}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \ t>0, \ r<1, \\ u\big|_{r=1} = 0, \ u\big|_{t=0} = r^2\sin\varphi, \ u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ - гладкие функции на рассматриваемых отрезках, $r$, $\varphi$ - полярные координаты: $u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin\varphi$, $r<4$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = g(r)\sin\varphi$, $u_t\big|_{t=0} = 0$, $u\big|_{r=4} = 0$.

### 3. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathbb{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathbb{R}^3$: полупространство $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x| < R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u = -f(x), \ |x|<R, \\ u\big|_{|x|=R} = u_0(x). \end{array}\right.$

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 18. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

### 1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0; 6\pi]$, удовлетворяющие условиям: $f'(0)=0$, $f'(6\pi)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} 9u_{tt}=u_{xx},\ t>0,\ 0<x<3, \\ u\big|_{t=0}=f(x),\ u_x\big|_{x=0}=0=u\big|_{x=3} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=u_{xx}+x^2$, $x\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=2x^2-x$, $u_x\big|_{x=0}=0$, $u_x\big|_{x=\frac{1}{4}}=\dfrac{t}{2}$.

### 2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{17}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} 4u_{tt}=\Delta u,\ t>0,\ r<1, \\ u\big|_{r=1}=0,\ u\big|_{t=0}=J_0\left(\mu_1^{(0)}r\right),\ u_t\big|_{t=0}=0, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ - гладкие функции на рассматриваемых отрезках, $r$, $\varphi$ - полярные координаты: $u_{tt}=\Delta u+f(r)\cos^2\varphi$, $r<3$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=0$, $u_t\big|_{t=0}=0$, $r<3$; $u\big|_{r=3}=0$, $t>0$.

### 3. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathbb{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathbb{R}^3$: восьмая часть шара $|x|<R$, $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{ll} \Delta u=0, & x_3>0, \\ u\big|_{x_3=0}=\theta\left(x_2-x_1\right). & \end{array}\right.$.

# 19. УМФ  3курс 6 семестр **1 задание**

**1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.**

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{6}\right]$, удовлетворяющие условиям: $f(0)=0$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx},\ t>0,\ 0<x<\pi, \\ u\big|_{t=0}=f(x),\ u_t\big|_{t=0}=g(x),\ u\big|_{x=0}=0=u_x\big|_{x=\pi} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt}=9u_{xx}+18x\cos x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=\sin x$, $u_t\big|_{t=0}=2x+1$, $u\big|_{x=0}=t$, $u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=2t$.

**2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.**

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{18}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_t=4\Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0}=J_1\left(\mu_2^{(1)}\dfrac{r}{2}\right)\sin\varphi, \end{cases}$ $\mu_2^{(1)}$ - положительный ноль функции $J_1(x)$, записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ - гладкие функции на рассматриваемых отрезках, $r$, $\varphi$ - полярные координаты: $4u_t=\Delta u-8u+4tf(r)\cos\varphi$, $r<6$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=5J_3\left(\dfrac{\mu_k^{(3)}}{6}r\right)\cos 3\varphi$, $u\big|_{r=6}=0$, $\left|u\big|_{r=0}\right|<+\infty$, $\mu_k^{(3)}>0$, $J_3\left(\mu_k^{(3)}\right)=0$.

**3. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathbb{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathbb{R}^3$: четверть шара $|x|<R,\ x_2>0$, $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\left[\begin{array}{l}\Delta u=0,\quad |x|<R, \\ u\big|_{|x|=R}=1.\end{array}\right.$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

# 20. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

**1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.**

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 2], удовлетворяющие условиям: $f(0)=0$, $f(2)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}+4u+\cos t, & t>0,\ 0<x<1, \\ u\big|_{t=0}=f(x),\ u_t\big|_{t=0}=g(x),\ u_x\big|_{x=0}=0=u_x\big|_{x=1} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t=16u_{xx}+4x^2+2x$, $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=2\cos(\pi x)$, $u_x\big|_{x=0}=2t$, $u\big|_{x=\frac{1}{2}}=2t$.

**2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.**

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{19}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt}=\Delta u,\ t>0,\ r<2, \\ u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{t=0}=J_0\left(\mu_1^{(0)}\dfrac{r}{2}\right),\ u_t\big|_{t=0}=J_2\left(\mu_1^{(2)}\dfrac{r}{2}\right)\cos 2\varphi, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ - положительный ноль функции $J_0(x)$, $\mu_1^{(2)}$ - положительный ноль функции $J_2(x)$,записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ - гладкие функции на рассматриваемых отрезках, $r$, $\varphi$ - полярные координаты: $u_{tt}=4\Delta u+f(r)\cos^2\varphi$, $r<3$, $t>0$; $u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0$, $u\big|_{r=3}=0$, $\left|u\big|_{r=0}\right|<+\infty$.

**3. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $\mathbb{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathbb{R}^3$: двугранный угол $x_2>0$, $x_3>0$.
3. Найти решение задачи Дирихле для шара $|x|<R$: $\left[\begin{array}{l} \Delta u=-a=const, \quad |x|<R, \\ u\big|_{|x|=R}=0. \end{array}\right.$

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

## 21. УМФ 3курс 6 семестр **1 задание**

**1. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.**

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на отрезке [0; 3], удовлетворяющие условиям: $f(0)=0$, $f'(3)=0$.
2. Записать общий вид решения задачи $\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + F(x,t), \ t>0, \ 0<x<2, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \ u_t\big|_{t=0} = g(x), \ u_x\big|_{x=0} = 0 = u_x\big|_{x=2} \end{cases}$ в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_t = 4u_{xx} + 9u - 27\pi x(x-2\pi) - \dfrac{9}{2\pi}(x+2\pi)$, $t>0$, $0<x<2\pi$; $u\big|_{t=0} = 1+\sin x + \dfrac{x}{2\pi}$, $0 \le x \le 2\pi$; $u\big|_{x=0} = 1$, $u\big|_{x=2\pi} = 2$, $t \ge 0$.

**2. Метод Фурье с применением функций Бесселя.**

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_{20}(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \ t>0, r<1, \\ u\big|_{r=1} = 0, u\big|_{t=0} = r^2\sin\varphi, u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда с разделенными переменными; указать в нем общий вид функций зависящих от $r$ и зависящих от $\varphi$ (функции, зависящие от $t$, вычислять не надо).
3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ - гладкие функции на рассматриваемых отрезках, $r$, $\varphi$ - полярные координаты: $u_t = \dfrac{1}{9}\Delta u - 2u + e^{-t} f(r)\cos 4\varphi$, $u = u(r,\varphi,t)$, $r<2$, $t>0$; $u\big|_{t=0} = 2J_2\left(\dfrac{\mu_k^{(2)}}{2} r\right)\sin 2\varphi$, $u\big|_{r=2} = 0$, $\left|u\big|_{r=0}\right| < +\infty$, $\mu_k^{(2)} > 0$, $J_2\left(\mu_k^{(2)}\right) = 0$.

**3. Функция Грина задачи Дирихле.**

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для $R^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Пользуясь методом отражений построить функцию Грина для части пространства, заключенного между параллельными плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\left[\begin{array}{l} \Delta u = -f(x), \quad x_3 > 0, \\ u\big|_{x_3=0} = u_0(x). \end{array}\right.$ для непрерывных и ограниченных $f(x)$ и $u_0(x)$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -