



## 1. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание

### 1. Интегральные уравнения.

1. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано  $K^*(x, y) = x - y^3 x$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Выписать  $K(x, y)$ .
3. Решить при всех допустимых значениях  $\lambda$  уравнение  $\varphi(x) = 2\lambda \int_0^{\pi/3} (\cos 3x \cos 6y - 2 \sin 3x \sin 6y) \varphi(y) dy - 3 \cos 9x + 2 \sin 9x$ . Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора.

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $e^{2x}(y'' - 4y' + 3y) = \lambda y$ ,  $0 < x < \ln 2$ ,  $y'(0) - y(0) = 0$ ,  $y'(\ln 2) = 0$ .

### 3. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{x | < R\}$  с плотностью  $\rho = \rho(|x|)$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{x | < R\}$ , но и вне его.



## 2. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание

### 1. Интегральные уравнения.

1. Союзное уравнение.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано  $K^*(x, y) = 1$  ( $x, y \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ). Найти собственные функции и характеристические числа этого оператора.
3. Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра  $\alpha$ , при котором интегральное уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_{|y| < 1} (10|x|^2 - 6|x||y|) \varphi(y) dy + |x|^2 + \alpha|x|$ ,  $|x| < 1$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  разрешимо для любых  $\lambda$ . Найти решения при этом значении  $\alpha$ .

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 2, \\ y(0) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = \lambda y$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y(1) + y'(1) = 0$ .

### 3. Потенциалы.

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. На сфере радиуса  $R$  распределены диполи с плотностью момента  $v = \cos \theta$ , ориентированные вдоль внешней нормали. Найти потенциал двойного слоя в точке оси  $\theta = 0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).





### 3. УМФ З курс 6 семестр 2 задание

#### 1. Интегральные уравнения.

1. Характеристические числа и собственные функции.
2. Дано ядро  $K(x, y) = -1$  ( $x, y \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ) интегрального оператора Фредгольма. Найти все решения однородного интегрального уравнения для этого оператора и выписать  $K^*(x, y)$ .
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных  $\lambda$ :  $u(x) = \lambda \int_1^2 \left( \frac{4}{x^2 y^2} - 1 \right) u(y) dy + 3x^2 - 4$ ,  $u(x) \in C[1, 2]$ .

#### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'' + y, & 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, & y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $(1 + e^{-x})y'' - y' = \lambda y + e^{2x}$ ,  $0 < x < 2$ ,  $y(0) - 2 \ln 2 y'(0) = 0$ ,  $y'(2) = 0$ .

#### 3. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара  $\{x | = R\}$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{x | < R\}$ , но и вне его.



### 4. УМФ З курс 6 семестр 2 задание

#### 1. Интегральные уравнения.

1. Теоремы Фредгольма для уравнений с вырожденным ядром.
2. Дать определение характеристического числа и собственной функции интегрального оператора Фредгольма.
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных  $\lambda$ :  $u(x) = \lambda \int_0^1 (2\sqrt{xy} - 1) u(y) dy + 10x - 9$ ,  $u(x) \in C[0, 1]$ .

#### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'' + 4y, & 0 < x < 1, \\ 2y(0) - y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению:  $(x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y + \lambda y = 0$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y(1) - y'(1) = 0$ .

#### 3. Потенциалы.

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{x | < R\}$  с постоянной плотностью. Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{x | < R\}$ , но и вне его.



## 5. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



### 1. Интегральные уравнения.

1. Уравнения с непрерывными и полярными ядрами.
2. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений.
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить

интегральное уравнение при всех возможных  $\lambda$ :  $u(x) = \lambda \int_{1/2}^1 \left( \frac{3x^2}{y^2} - 8 \right) u(y) dy - 6x^2 + 7$ ,  $u(x) \in C\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:

$$\begin{cases} -y'' + xy = \lambda y + x^3, & 1 < x < 2, \\ y(1) = y'(2) = 0. \end{cases}$$

3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ , где  $f(x)$  - непрерывная на отрезке  $[0;1]$  функция.

### 3. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал двойного слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара  $\{x| = R\}$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{x| < R\}$ , но и вне его.



## 6. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



### 1. Интегральные уравнения.

1. Уравнение с малым по норме оператором, ряд Неймана.
2. Выписать в общем виде однородное и неоднородное интегральные уравнения Фредгольма (и указать условия на гладкость всех входящих в них функций).
3. Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить

интегральное уравнение при всех возможных  $\lambda$ :  $u(x) = \lambda \int_0^{\ln 2} \left( \frac{2}{3} e^{3x-y} - 3e^y \right) u(y) dy + 4e^{3x} - 18$ ,  $u(x) \in C[0, \ln 2]$ .

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, & 0 < x < 2, \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

3. Свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:  $-y'' + \frac{2}{x} y' = \lambda x^3 y$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y(1) - y'(1) = 0$ .

### 3. Потенциалы.

1. Разрыв потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала двойного слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. На круглом диске радиуса  $R$  распределены диполи с постоянной плотностью момента, ориентированные вдоль нормали, направленной в сторону отрицательных  $x_3$ . Найти потенциал двойного слоя в точке, лежащей на оси диска.





## 7. УМФ Курс 6 семестр 2 задание

### 1. Интегральные уравнения.

1. Резольвента и резольвентное ядро.
2. Сформулировать теорему Фредгольма, описывающую необходимые и достаточные условия для разрешимости неоднородного интегрального уравнения.
3. Решить интегральное уравнение:  $u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (5x^2y^3 + 7x^3y^2)u(y)dy + 5x + 7x^4$ ,  $u(x) \in C[-1,1]$ , где  $\lambda$  – вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:  
$$\begin{cases} -x^2y'' - 2xy' = \lambda y, & 1 < x < 2, \\ y(1) + y'(1) = 0, & y(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+2)^2y'' + (x+2)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $-1 < x < 0$ ,  $y'(-1) = 0$ ,  $y'(0) + \alpha y(0) = 0$ , где  $\alpha > 0$ ,  $f(x) \in C[-1;0]$ .

### 3. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{x \mid |x| < R\}$  с постоянной плотностью. Рассмотреть случай  $n=2$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{x \mid |x| < R\}$ , но и вне его.



## 8. УМФ Курс 6 семестр 2 задание

### 1. Интегральные уравнения.

1. Сведение уравнений с полярными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами.
2. Для интегрального уравнения Фредгольма  $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xe^{x^2} \operatorname{sh}^4 t + \sin x(t^2 - t^4) \cos t) y(t) dt + f(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $y \in L_2([-1,1])$ ,  $f \in L_2([-1,1])$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  выписать сопряженное однородное уравнение.
3. Решить интегральное уравнение:  $u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y - \cos^2 y) u(y) dy + 3 \sin x + \cos x$ ,  $u(x) \in C[-\pi, \pi]$ , где  $\lambda$  – вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:  
$$\begin{cases} -e^x y'' - e^x y' + x^3 y = \lambda y + \sin x, & 0 < x < 1, \\ y(0) + 2y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу:  $x^2 y'' - xy' + y = \lambda x^3 y + f(x)$ ,  $\frac{1}{2} < x < 1$ ,  $2y\left(\frac{1}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .

### 3. Потенциалы.

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. На круглом диске радиуса  $R$  распределен простой слой с плотностью  $\mu = r^2$ . Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска.





## 9. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание

### 1. Интегральные уравнения.

1. Теоремы Фредгольма в общем случае.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано  $K^*(x, y) = x - y^3 x$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Выписать  $K(x, y)$ .
3. Решить интегральное уравнение:  $u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (3xy^2 + 5x^2 y) u(y) dy + 5x^3 - 7x^4$ ,  $u(x) \in C[-1, 1]$ , где  $\lambda$  – вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = \alpha y(0)$ ,  $y'(1) = 0$ , где  $\alpha > 0$ ,  $f(x)$  – непрерывная на отрезке  $[0; 1]$  функция.

### 3. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{|x| < R\}$  с плотностью  $\rho = |x|$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{|x| < R\}$ , но и вне его.



## 10. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание

### 1. Интегральные уравнения.

1. Уравнения с эрмитовыми ядрами.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано  $K^*(x, y) = 1$  ( $x, y \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ). Найти собственные функции и характеристические числа этого оператора.
3. Решить интегральное уравнение:  $u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{3}{2} x \cos y + y \cos x \right) u(y) dy + x^2 + 2\pi \sin x$ ,  $u(x) \in C[-\pi, \pi]$ , где  $\lambda$  – вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 2, \\ y(0) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-\frac{1}{x} y'' + \frac{1}{x^2} y' + \frac{3}{x^3} y = \lambda \sin x y + e^x$ ,  $1 < x < 2$ ,  $y'(1) = 0$ ,  $y(2) + 2y'(2) = 0$ .

### 3. Потенциалы.

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя, распределенный с постоянной плотностью на цилиндре  $\{x_1^2 + x_2^2 = R^2, 0 \leq x_3 \leq H\}$  в точке лежащей на оси  $x_3$ .

## 11. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



### 1. Интегральные уравнения.

1. Симметричность интегрального оператора с эрмитовым ядром.
2. Дано ядро  $K(x, y) = -1$  ( $x, y \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ) интегрального оператора Фредгольма. Найти все решения однородного интегрального уравнения для этого оператора и выписать  $K^*(x, y)$ .
3. Решите при всех допустимых значениях  $\lambda$  и  $a$  уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy^3 - x^2y^2)\rho(y)dy + ax^2 + x^3$  и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'' + y, & 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, & y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+2)^2 y'' + (x+2)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(-1) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , где  $f(x) \in C[-1; 0]$ .

### 3. Потенциалы.

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя, распределенный с постоянной плотностью на цилиндре  $\{x_1^2 + x_2^2 = R^2, 0 \leq x_3 \leq H\}$  в точке лежащей на оси  $x_3$ .



## 12. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



### 1. Интегральные уравнения.

1. Теорема о существовании характеристических чисел.
2. Дать определение характеристического числа и собственной функции интегрального оператора Фредгольма.
3. Решите при всех допустимых значениях  $\lambda$  и  $a$  уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos y \cos x)\rho(y)dy + ax + \cos x$  и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'' + 4y, & 0 < x < 1, \\ 2y(0) - y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-\frac{1}{\cos x} y'' + \frac{2 \operatorname{ctg} 2x}{\cos x} y' = \lambda y + f(x)$ ,  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

### 3. Потенциалы.

1. Разрыв потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала двойного слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти потенциал простого слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара  $\{x| = R\}$ . Рассмотреть случай  $n=2$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{x| < R\}$ , но и вне его.



### 13. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



#### 1. Интегральные уравнения.

1. Теорема Гильберта-Шмидта для уравнений с непрерывными эрмитовыми ядрами.
2. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений.
3. Решите при всех допустимых значениях  $\lambda$  и  $a$  уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 y^2 - xy) \rho(y) dy + x^3 + a$  и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

#### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:  
$$\begin{cases} -y'' + xy = \lambda y + x^3, & 1 < x < 2, \\ y(1) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = \lambda y, \quad 0 < x < 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$

#### 3. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{|x| < R\}$  с плотностью  $\rho = \sqrt{|x|}$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{|x| < R\}$ , но и вне его.



### 14. УМФ Курс 6 семестр 2 задание



#### 1. Интегральные уравнения.

1. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода.
2. Выписать в общем виде однородное и неоднородное интегральные уравнения Фредгольма (и указать условия на гладкость всех входящих в них функций).
3. Решите при всех допустимых значениях  $\lambda$  и  $a$  уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \cos y + y \sin x) \rho(y) dy + \cos x + a \sin x$  и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

#### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:  
$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, & 0 < x < 2, \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $(1 + e^{-x})y'' - y' = \lambda y + e^{2x}, \quad 0 < x < 2, \quad y(0) - 2 \ln 2 y'(0) = 0, \quad y'(2) = 0.$

#### 3. Потенциалы.

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. Для сферического слоя  $R_1 < |x| < R_2$  вычислить объемный потенциал масс, распределенных с постоянной плотностью.



## 15. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Интегральные уравнения.

1. Союзное уравнение.
2. Сформулировать теорему Фредгольма, описывающую необходимые и достаточные условия для разрешимости неоднородного интегрального уравнения.
3. Найти решение уравнения  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left( \sin^3 x \cdot \frac{\operatorname{sh} y}{y} + x \operatorname{ch} x (y^2 + 2) e^{y^2} \right) \varphi(y) dy + f(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . При каких  $f(x) \in C([-1,1])$  и  $\lambda$  решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного оператора?

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
 
$$\begin{cases} -x^2 y'' - 2xy' = \lambda y, & 1 < x < 2, \\ y(1) + y'(1) = 0, & y(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению:  $(x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y + \lambda y = 0$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y(1) - y'(1) = 0$ .

### 3. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. На круглом диске радиуса  $R$  распределен простой слой с плотностью  $\mu = \mu(\phi)$  - непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция. Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска.



## 16. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Интегральные уравнения.

1. Характеристические числа и собственные функции.
2. Для интегрального уравнения Фредгольма  $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x e^{x^2} \operatorname{sh}^4 t + \sin x (t^2 - t^4) \cos t) y(t) dt + f(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $y \in L_2([-1,1])$ ,  $f \in L_2([-1,1])$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  выписать сопряженное однородное уравнение.
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях  $\lambda$  уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + x^3) \varphi(y) dy + 2 \cos x$ .

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:
 
$$\begin{cases} -e^x y'' - e^x y' + x^3 y = \lambda y + \sin x, & 0 < x < 1, \\ y(0) + 2y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ , где  $f(x)$  - непрерывная на отрезке  $[0;1]$  функция.

### 3. Потенциалы.

1. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала простого слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. С помощью потенциалов решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара  $|x| < R$  в  $\mathbb{R}^3$ .





## 17. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Интегральные уравнения.

1. Теоремы Фредгольма для уравнений с вырожденным ядром.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано  $K^*(x, y) = x - y^3 x$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Выписать  $K(x, y)$ .
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях  $\lambda$  уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (24x^3 y^2 - 14x + 3) \rho(y) dy - 12x^3 + 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:  $-y'' + \frac{2}{x}y' = \lambda x^3 y$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y(1) - y'(1) = 0$ .

### 3. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{x \mid x < R\}$  с плотностью  $\rho = e^{-|x|}$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{x \mid x < R\}$ , но и вне его.



## 18. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Интегральные уравнения.

1. Уравнения с непрерывными и полярными ядрами.
2. Для интегрального оператора Фредгольма дано  $K^*(x, y) = 1$  ( $x, y \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ). Найти собственные функции и характеристические числа этого оператора.
3. Найти решение уравнения  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x e^{x^2} \operatorname{sh}^4 y + \sin x (y^2 - y^4) \cos y) \rho(y) dy + f(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . При каких  $f(x) \in C([-1, 1])$  и  $\lambda$  решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного оператора?

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 2, \\ y(0) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+2)^2 y'' + (x+2)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $-1 < x < 0$ ,  $y'(-1) = 0$ ,  $y'(0) + \alpha y(0) = 0$ , где  $\alpha > 0$ ,  $f(x) \in C[-1; 0]$ .

### 3. Потенциалы.

1. Разрыв потенциала двойного слоя.
2. Перечислить основные свойства потенциала двойного слоя. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{x \mid x < R\}$  с плотностью  $\rho = \rho(|x|)$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{x \mid x < R\}$ , но и вне его.

## 19. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Интегральные уравнения.

1. Уравнение с малым по норме оператором, ряд Неймана.
2. Дано ядро  $K(x, y) = -1$  ( $x, y \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ) интегрального оператора Фредгольма. Найти все решения однородного интегрального уравнения для этого оператора и выписать  $K^*(x, y)$ .
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях  $\lambda$  уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\operatorname{sh} x + x^2 y^2) \rho(y) dy - 3$ .

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'' + y, & 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, & y(1) = 0. \end{cases}$$
3. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу:  $x^2 y'' - xy' + y = \lambda x^3 y + f(x)$ ,  $\frac{1}{2} < x < 1$ ,  $2y\left(\frac{1}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .

### 3. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. На сфере радиуса  $R$  распределены диполи с плотностью момента  $v = \cos \theta$ , ориентированные вдоль внешней нормали. Найти потенциал двойного слоя в точке оси  $\theta = 0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).



## 20. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Интегральные уравнения.

1. Резольвента и резольвентное ядро.
2. Дать определение характеристического числа и собственной функции интегрального оператора Фредгольма.
3. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых значениях  $\lambda$  уравнение  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (3x^2 - 6xy + 1) \rho(y) dy + 4x - 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение функции Грина задачи Штурма-Лиувилля и указать общий вид формулы для ее вычисления.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: 
$$\begin{cases} Ly = -y'' + 4y, & 0 < x < 1, \\ 2y(0) - y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $y'(0) = \alpha y(0)$ ,  $y'(1) = 0$ , где  $\alpha > 0$ ,  $f(x)$  - непрерывная на отрезке  $[0; 1]$  функция.

### 3. Потенциалы.

1. Дать определение поверхности Ляпунова.
2. Перечислить основные свойства объемного потенциала.
3. Найти потенциал простого слоя с постоянной плотностью, сосредоточенный на границе шара  $\{x| = R\}$ . Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{x| < R\}$ , но и вне его.



## 21. УМФ 3 курс 6 семестр 2 задание



### 1. Интегральные уравнения.

1. Сведение уравнений с полярными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами.
2. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений.
3. Найти решение уравнения  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left( x \operatorname{sh}^2 x \cdot \frac{\sin^3 y}{y} + \sin^3 x \cdot y^2 \operatorname{ch} y \right) \varphi(y) dy + f(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . При каких  $f(x) \in C([-1,1])$  и  $\lambda$  решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного оператора?

### 2. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. С помощью функции Грина свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению:  
$$\begin{cases} -y'' + xy = \lambda y + x^3, & 1 < x < 2, \\ y(1) = y'(2) = 0. \end{cases}$$
3. Свести к интегральному уравнению задачу:  $-\frac{1}{x}y'' + \frac{1}{x^2}y' + \frac{3}{x^3}y = \lambda \sin xy + e^x$ ,  $1 < x < 2$ ,  
 $y'(1) = 0$ ,  $y(2) + 2y'(2) = 0$ .

### 3. Потенциалы.

1. Дать определение потенциала простого слоя.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара  $\{|x| < R\}$  с постоянной плотностью. Рассмотреть случай  $n=3$ . Определить потенциал не только в шаре  $\{|x| < R\}$ , но и вне его.

