Рассматривается метод Рунге-Кутты $k_1 = f\left(x_n + \frac{1}{3}h,\ y_n + h\left(\beta_{11}k_1 + \beta_{12}k_2\right)\right)$,

$k_2 = f\left(x_n + h\alpha_2,\ y_n + h\left(\beta_{21}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right)\right)$, $y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{3}{4}k_1 + c_2 k_2\right)$.

1. Выписать для него таблицу Бутчера.
2. Определить, является данный метод явным или неявным.
3. Дополнить недостающие коэффициенты таблицы на основании условий Кутты и аппроксимации более чем первого порядка.
4. Найти функцию устойчивости.
5. Исследовать метод на A–, L– устойчивость и монотонность.

-1-

Таблица Бутчера[1]

$$\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \beta_{22} \\ \hline & c_1 & c_2 \end{array}$$

Для нашей задачи таблица Бутчера

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{3}{4} & c_2 \end{array}$$

-2-

Если $\beta_{12} \neq 0$, метод неявный,

при $\beta_{12} = 0$ - метод диагонально-неявный: $\beta_{22} = \frac{1}{4}$.

-3-

Условия Кутты: $\alpha_i = \sum_{j=1}^{s} \beta_{ij}$.

Условие первого порядка аппроксимации: $\sum_{j=1}^{s} c_j = 1$.

Условие второго порядка аппроксимации: $\sum_{j=1}^{s} \alpha_j c_j = \frac{1}{2}$.

Условия третьего порядка аппроксимации: $\sum_{j=1}^{s} \alpha_j^{\,2} c_j = \frac{1}{3}$,

$\sum_{i=1}^{s} c_i \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \beta_{ij} = \frac{1}{6}$[2].

[1] Петров, Лобанов. Лекции по вычислительной математике. Лекция 8.6
Аристова, Лобанов. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Ч. II. X.2.1

Для нашей задачи:

Условия Кутты: $\frac{1}{3} = \beta_{11} + \beta_{12}$, $\alpha_2 = \beta_{11} + \frac{1}{4}$.

Условие первого порядка аппроксимации: $c_1 + c_2 = \frac{3}{4} + c_2 = 1 \rightarrow \underline{c_2 = \frac{1}{4}}$.

Условие второго порядка аппроксимации: $\frac{1}{3}\frac{3}{4} + \alpha_2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \underline{\alpha_2 = 1}$

и $\rightarrow$ (из условий Кутты) $\underline{\beta_{21} = \frac{3}{4}}$.

Условия третьего порядка аппроксимации: $\alpha_1{}^2 c_1 + \alpha_2{}^2 c_2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ - выполнено.

Второе условие $c_1(\alpha_1\beta_{11} + \alpha_2\beta_{12}) + c_2(\alpha_1\beta_{21} + \alpha_2\beta_{22}) = \frac{1}{6}$ имеет вид $3\beta_{11} + 9\beta_{12} + \frac{3}{2} = 2$ и, с учетом условия Кутты, для определения β_{11}, β_{12} получили систему $\begin{cases} 3\beta_{11} + 9\beta_{12} = \frac{1}{2}, \\ 3\beta_{11} + 3\beta_{12} = 1. \end{cases}$

Решив которую, получаем $\underline{\beta_{12} = -\frac{1}{12}}$, $\underline{\beta_{11} = \frac{5}{12}}$.

Итак, таблица Бутчера принимает вид

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Метод (Радо) не ниже третьего порядка (третьего порядка) аппроксимации.

-4-

Функция устойчивости МРК:

$$R(z) = 1 + z\vec{b}^T (E - zA)^{-1} \vec{1} \qquad \text{(I)}$$

или

$$R(z) = \frac{\det\left(E - zA + z\vec{1}\vec{b}^T\right)}{\det(E - zA)}{}^{3}. \qquad \text{(II)}$$

---

[2] Петров, Лобанов. Лекции по вычислительной математике. Лекция 8.2
Аристова, Лобанов. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Ч. II. X.2.1

[3] Петров, Лобанов. Лекции по вычислительной математике. Лекция 9.4
Аристова, Лобанов. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Ч. II. X.2.1

I. $A=\begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $E-zA=\begin{pmatrix} 1-\frac{5}{12}z & +\frac{1}{12}z \\ -\frac{3}{4}z & 1-\frac{1}{4}z \end{pmatrix}$,

$$(E-zA)^{-1}=\frac{1}{\det(E-zA)}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4}z & -\frac{1}{12}z \\ \frac{3}{4}z & 1-\frac{5}{12}z \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4}z & -\frac{1}{12}z \\ \frac{3}{4}z & 1-\frac{5}{12}z \end{pmatrix}}{\left(1-\frac{5}{12}z\right)\left(1-\frac{1}{4}z\right)+\frac{3}{4}z\cdot\frac{1}{12}z} =$$

$$=\frac{\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4}z & -\frac{1}{12}z \\ \frac{3}{4}z & 1-\frac{5}{12}z \end{pmatrix}}{1-\frac{2}{3}z+\frac{5}{48}z^2+\frac{3}{48}z^2} = \frac{\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4}z & -\frac{1}{12}z \\ \frac{3}{4}z & 1-\frac{5}{12}z \end{pmatrix}}{\frac{1}{6}z^2-\frac{2}{3}z+1} = 6\frac{\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4}z & -\frac{1}{12}z \\ \frac{3}{4}z & 1-\frac{5}{12}z \end{pmatrix}}{z^2-4z+6} =$$

$$=\frac{6}{(z-2)^2+2}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4}z & -\frac{1}{12}z \\ \frac{3}{4}z & 1-\frac{5}{12}z \end{pmatrix}.$$

$$(E-zA)^{-1}\mathbb{1} = \frac{6}{(z-2)^2+2}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4}z & -\frac{1}{12}z \\ \frac{3}{4}z & 1-\frac{5}{12}z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{6}{(z-2)^2+2}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3}z \\ 1+\frac{1}{3}z \end{pmatrix}.$$

$$\vec{b}^T(E-zA)^{-1}\vec{\mathbb{1}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\frac{6}{(z-2)^2+2}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3}z \\ 1+\frac{1}{3}z \end{pmatrix} = \frac{\frac{3}{2}}{(z-2)^2+2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3}z \\ 1+\frac{1}{3}z \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\left(3-z+1+\frac{1}{3}z\right)}{(z-2)^2+2} = \frac{3\left(4-\frac{2}{3}z\right)}{2\left((z-2)^2+2\right)}$$

$$R(z)=1+z\vec{b}^T(E-zA)^{-1}\vec{\mathbb{1}} = 1+\frac{3z\left(4-\frac{2}{3}z\right)}{2\left((z-2)^2+2\right)} = 1+\frac{z(12-2z)}{2\left((z-2)^2+2\right)} =$$

$$=\frac{2z^2-8z+12+12z-2z^2}{2\left((z-2)^2+2\right)} = \frac{4z+12}{2\left((z-2)^2+2\right)} = \frac{2z+6}{(z-2)^2+2}.$$

II. $A=\begin{pmatrix}\frac{5}{12} & -\frac{1}{12}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$, $E-zA=\begin{pmatrix}1-\frac{5}{12}z & +\frac{1}{12}z\\ -\frac{3}{4}z & 1-\frac{1}{4}z\end{pmatrix}$,

$$\det(E-zA)=\left(1-\frac{5}{12}z\right)\left(1-\frac{1}{4}z\right)+\frac{3}{4}z\cdot\frac{1}{12}z=1-\frac{2}{3}z+\frac{5}{48}z^2+\frac{3}{48}z^2=$$

$$=\frac{1}{6}z^2-\frac{2}{3}z+1=\frac{1}{6}\left(z^2-4z+6\right)/$$

$$\vec{1}\vec{b}^T=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

$$E-zA+z\vec{1}\vec{b}^T=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{3}z & \frac{1}{3}z\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\det\left(E-zA+z\vec{1}\vec{b}^T\right)=1+\frac{1}{3}z\,.$$

$$R(z)=\frac{\det\left(E-zA+z\vec{1}\vec{b}^T\right)}{\det(E-zA)}=\frac{1+\frac{1}{3}z}{\frac{1}{6}\left(z^2-4z+6\right)}=\frac{2z+6}{(z-2)^2+2}.$$

Итак, $\underline{R(z)=\dfrac{2z+6}{(z-2)^2+2}}$.

-5-

монотонность:

Определение: Если функция устойчивости положительна на отрицательной части действительной оси (т.е $R(z)>0$ при $\operatorname{Im}z=0$, $\operatorname{Re}z=0$), то метод называется монотонным.[4]

$R(x)=\dfrac{2x+6}{(x-2)^2+2}$ меняет знак при $x=-3$, следовательно, метод не является монотонным.

L– устойчивость:

Определение: Численный метод называется L-устойчивым (или асимптотически устойчивым), если он А-устойчив и выполнено условие $|R(z)|\to 0$ при $\operatorname{Re}z\to-\infty$. [5]

$|R(z)|\approx\dfrac{2}{|z|}\to 0$ при $\operatorname{Re}z\to-\infty$. Поэтому, если он А-устойчив, то является L-устойчивым (или асимптотически устойчивым).

---

[4] Аристова, Лобанов. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Ч. II. X.2.1

[5] Петров, Лобанов. Лекции по вычислительной математике. Лекция 9.1

Аристова, Лобанов. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Ч. II. X.2.1

А– устойчивость:

Определение (Далквист 1963): Если область абсолютной устойчивости $|R(z)| \le 1$ включает в себя левую полуплоскость комплексной плоскости $\operatorname{Re} z < 0$, то то метод называется А-устойчивым. [6]

I способ.

Будем рассматривать $z = -\rho e^{i\alpha}$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\rho \in [0, +\infty)$, т.е. $\operatorname{Re} z = -\rho \cos\alpha < 0$.

При этом $R(-\rho e^{i\alpha}) = \dfrac{2(-\rho e^{i\alpha}) + 6}{(-\rho e^{i\alpha})^2 - 4(-\rho e^{i\alpha}) + 6} =$

$$= \frac{-2\rho\cos\alpha - i2\rho\sin\alpha + 6}{\rho^2\cos 2\alpha + i\rho^2\sin 2\alpha + 4\rho\cos\alpha + i4\rho\sin\alpha + 6} =$$

$$\frac{(6 - 2\rho\cos\alpha) - i2\rho\sin\alpha}{(\rho^2\cos 2\alpha + 4\rho\cos\alpha + 6) + i(\rho^2\sin 2\alpha + 4\rho\sin\alpha)}.$$

$|R(z)| \le 1 \Leftrightarrow$

$$|(6 - 2\rho\cos\alpha) - i2\rho\sin\alpha| \le |(\rho^2\cos 2\alpha + 4\rho\cos\alpha + 6) + i(\rho^2\sin 2\alpha + 4\rho\sin\alpha)|$$

или $|(6 - 2\rho\cos\alpha) - i2\rho\sin\alpha|^2 \le \left|\begin{matrix}(\rho^2\cos 2\alpha + 4\rho\cos\alpha + 6) + \\ + i(\rho^2\sin 2\alpha + 4\rho\sin\alpha)\end{matrix}\right|^2$.

Проверим, для каких значений угла α это неравенство выполнено при всех значениях ρ:

$$(6 - 2\rho\cos\alpha)^2 + 4\rho^2\sin^2\alpha \le (\rho^2\cos 2\alpha + 4\rho\cos\alpha + 6)^2 + (\rho^2\sin 2\alpha + 4\rho\sin\alpha)^2$$

т.е.

$$36 - 24\rho\cos\alpha + 4\rho^2\cos^2\alpha + 4\rho^2\sin^2\alpha \le$$

$$\le (\rho^2\cos 2\alpha + 4\rho\cos\alpha)^2 + 12(\rho^2\cos 2\alpha + 4\rho\cos\alpha) + 36 + (\rho^2\sin 2\alpha + 4\rho\sin\alpha)^2$$

, или

$$4\rho^2 - 24\rho\cos\alpha \le$$

$$\le \rho^4 + 8\rho^3(\cos 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha\sin\alpha) + 16\rho^2 + 12(\rho^2\cos 2\alpha + 4\rho\cos\alpha)'$$

или

$$-24\rho\cos\alpha \le \rho^4 + 8\rho^3\cos\alpha + 12\rho^2 + 12\rho^2\cos 2\alpha + 48\rho\cos\alpha,$$

или

$$0 \le \rho^4 + 8\rho^3\cos\alpha + 12\rho^2 + 24\rho^2\cos^2\alpha - \rho^2 + 72\rho\cos\alpha,$$

или, так как $\cos\alpha \in [0, 1]$, то

$$\rho^4 + 8\rho^3\cos\alpha + 11\rho^2 + 24\rho^2\cos^2\alpha + 72\rho\cos\alpha \ge \rho^4 + 11\rho^2 \ge 0.$$

Т.о. вся левая полуплоскость лежит в области устойчивости, и метод является А-устойчивым.

---

[6] Петров, Лобанов. Лекции по вычислительной математике. Лекция 9.1
Аристова, Лобанов. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Ч. II. X.2.1

II способ (Пирогов В.Б.).

Воспользуемся ТФКП:

Теорема (принцип максимума модуля). Пусть функция $f : G \to \mathbb{C}$ регулярна в ограниченной области G и непрерывна в $\overline{G} = G \cup \Gamma$, где Γ - граница области G. Пусть $f(z) \equiv / \equiv const$. Тогда супремум модуля этой функции $\sup\{|f(z)| \, | \, z \in \overline{G}\}$ достигается на границе Γ области G.[7]

Для этого рассмотрим знаменатель функции устойчивости: $(z-2)^2 + 2 = 0$ при $z = 2 \pm i\sqrt{2}$. Т.е. функция устойчивости регулярна при $\operatorname{Re} z \le 0$.

$|R(z)| = \left| \dfrac{2z+6}{(z-2)^2 + 2} \right| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$, следовательно $\exists r_0 : \forall z : |z| > r_0 \ |R(z)| < 1$.

Построим область $G \subset \mathbb{C}$: $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \le 0, \ |z| \le r_0 + 1\}$. Заметим, что область по построению замкнута $G = \overline{G}$ и ограничена, а ее граница состоит из двух частей $\Gamma = \Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{\mathrm{Im}}$, где $\Gamma_{r_0} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \le 0, \ |z| = r_0 + 1\}$ и $\Gamma_{\mathrm{Im}} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0, \ |z| \le r_0 + 1\}$.

При этом $|R(z)| < 1$ для $\forall z \in \Gamma_{r_0}$ по построению. Если мы докажем, что $|R(z)| < 1$ для $\forall z \in \Gamma_{\mathrm{Im}}$, то по теореме из курса ТФКП $|R(z)| < 1$ для $\forall z \in G$. А так как $\forall z : |z| > r_0 \ |R(z)| < 1$, то $|R(z)| < 1$ и для $\forall z : \operatorname{Re} z < 0$, т.е. метод А-устойчив.

Итак, рассмотрим для $z = iy$ при $|y| \le r_0 + 1$ функцию устойчивости метода:

$$R(iy) = \frac{6 + i2y}{6 - y^2 - i4y}.$$

$|R(iy)| \le 1$ при $|6 + i2y| \le |6 - y^2 - i4y| \ \Leftrightarrow \ |6 + i2y|^2 \le |6 - y^2 - i4y|^2$, или $36 + 4y^2 \le (6 - y^2)^2 + 16y^2$, или $(6 - y^2)^2 + 12y^2 - 36 \ge 0$, или $y^4 \ge 0$, что справедливо для $\forall y$. Т.о. метод А-устойчив.

[7] Половинкин. Курс лекций по теории функций комплексного переменного. §24.