Покажите, что из равномерной устойчивости разностной схемы $y_{n+1} = R_\tau y_n + \tau B^{-1} f_n$ по начальным данным следует устойчивость по правым частям. Здесь R_τ - оператор послойного перехода.

Наряду с разностным уравнением

$$y_{n+1} = R_\tau y_n + \tau B^{-1} f_n \qquad (1)$$

Будем рассматривать также однородное разностное уравнение

$$y_{n+1} = R_\tau y_n . \qquad (2)$$

Определение 1. Разностная схема

$$y_{n+1} = R_\tau y_n + \tau B^{-1} f_n ,\ n = 0,1,\ldots, N-1 ;$$

$$y_0 \in H_h \text{ - задан}$$

называется ***устойчивой*** (***по начальным данным и правой части***), если найдутся постоянные $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$, не зависящие от τ, h и t_n, и такие, что при $\forall\ f_{h,\tau}(t_n) \in H_h$ - правых частях и

$$\forall\ y_0 \in H_h \text{ - начальных данных}$$

для решения уравнения (1) выполняется оценка

$$\|y_n\|_U \le M_1 \|y_0\|_U + M_2 \max_{0 \le j \le N-1} \|f_j\|_F ,\ n = 0,1,\ldots, N .$$

Определение 2. Разностная схема

$$y_{n+1} = R_\tau y_n + \tau B^{-1} f_n ,\ n = 0,1,\ldots, N-1 ;$$

$$y_0 \in H_h \text{ - задан}$$

называется ***устойчивой по начальным данным***, если найдется постоянная $M_1 > 0$, не зависящая от τ, h и t_n, и такая, что при $\forall\ y_0 \in H_h$ - начальных данных для решения однородного уравнения

$$y_{n+1} = R_\tau y_n ,\ n = 0,1,\ldots, N-1 ;$$

$$y_0 \in H_h \text{ - задан}$$

выполняется оценка

$$\|y_n\|_U \le M_1 \|y_0\|_U ,\ n = 0,1,\ldots, N .$$

Определение 3. Разностная схема

$$y_{n+1} = R_\tau y_n + \tau B^{-1} f_n ,\ n = 0,1,\ldots, N-1 ;$$

$$y_0 \in H_h \text{ - задан}$$

называется ***устойчивой по правой части***, если найдется постоянная $M_2 > 0$, не зависящая от τ, h и t_n, и такая, что при $\forall\ f_{h,\tau}(t_n) \in H_h$ - правых частях для решения уравнения

$$y_{n+1} = R_\tau y_n + \tau B^{-1} f_n ,\ n = 0,1,\ldots, N-1 ;$$

$$y_0 = 0$$

выполняется оценка

$$\|y_n\|_U \le M_2 \max_{0 \le j \le N-1} \|f_j\|_F ,\ n = 0,1,\ldots, N .$$

Определение 4. Разностная схема

$$y_{n+1} = R_\tau y_n + \tau B^{-1} f_n,\ n = 0,1,\dots,N-1;$$

$$y_0 \in H_h \text{ - задан}$$

называется ***равномерно** устойчивой по начальным данным*,

если найдутся $\rho = \mathrm{const} > 0$ и постоянная $M_1 > 0$, не зависящая от τ, h и t_n, и такие, что $\forall n = 0,1,\dots,N-1$, $N > 1$ и при $\forall\, y_n \in H_h$ - начальных данных для решения y_{n+1} однородного уравнения

$$y_{n+1} = R_\tau y_n,\ n = 0,1,\dots,N-1;$$

$$y_0 \in H_h \text{ - задан}$$

выполняется оценка

$$\|y_{n+1}\|_U \le \rho \|y_n\|_U,$$

причем $\rho^n \le M_1$.

Требование равномерной устойчивости эквивалентно ограниченности нормы оператора послойного перехода, который, вообще говоря, может зависеть от n, константой ρ:

$\|R_\tau\| \le \rho$.

А т.к. $\rho^n \le M_1$, то $\left\|\left(R_\tau\right)^n\right\| \le M_1$.

Пусть (для усугубления ситуации ☹) $B^{-1} = B_n^{-1}$ - зависит от n.

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1}\|_U &= \left\|R_\tau y_n + \tau B_n^{-1} f_n\right\|_U \le \|R_\tau y_n\|_U + \left\|\tau B_n^{-1} f_n\right\|_U \le \|R_\tau\|_U \|y_n\|_U + \tau \left\|B_n^{-1} f_n\right\|_U \le \\
&\le \rho \|y_n\|_U + \tau \left\|B_n^{-1} f_n\right\|_U \le \rho\left(\rho \|y_{n-1}\|_U + \tau \left\|B_{n-1}^{-1} f_{n-1}\right\|_U\right) + \tau \left\|B_n^{-1} f_n\right\|_U \le \\
&\le \rho^2 \|y_{n-1}\|_U + \rho\tau \left\|B_{n-1}^{-1} f_{n-1}\right\|_U + \tau \left\|B_n^{-1} f_n\right\|_U \le \ldots \le \\
&\le \rho^{n+1} \|y_0\|_U + \rho^n \tau \left\|B_0^{-1} f_0\right\|_U + \ldots + \rho\tau \left\|B_{n-1}^{-1} f_{n-1}\right\|_U + \tau \left\|B_n^{-1} f_n\right\|_U = \\
&= \rho^{n+1} \|y_0\|_U + \tau \sum_{j=0}^{n} \rho^{n-j} \left\|B_j^{-1} f_j\right\|_U {}^{1} \le M_1 \|y_0\|_U + \tau \sum_{j=0}^{n} M_1 \left\|B_j^{-1} f_j\right\|_U = \\
&= M_1 \|y_0\|_U + \tau M_1 \sum_{j=0}^{n} \left\|B_j^{-1} f_j\right\|_U \le M_1 \|y_0\|_U + \tau M_1 \sum_{j=0}^{n} \max_{0 \le j \le n} \left\|B_j^{-1} f_j\right\|_U = \\
&= M_1 \|y_0\|_U + \tau (n+1) M_1 \max_{0 \le j \le n} \left\|B_j^{-1} f_j\right\|_U = M_1 \|y_0\|_U + T\, M_1 \max_{0 \le j \le n} \left\|B_j^{-1} f_j\right\|_U .
\end{aligned}$$

Полагая теперь $M_2 = T\, M_1$ и вводя $\|f_j\|_F = \left\|B_j^{-1} f_j\right\|_U$, получаем, что

$$\|y_{n+1}\|_U \le M_1 \|y_0\|_U + M_2 \max_{0 \le j \le n} \|f_j\|_F .$$

Если теперь потребовать, что $y_0 = 0$, то

$$\|y_{n+1}\|_U \le M_2 \max_{0 \le j \le n} \|f_j\|_F ,$$

т.е. иместо устойчивость по правой части, ЧТД.

---

[1] В силу равномерной устойчивости по начальным данным $\rho^{n+1} \le M_1$ и $\rho^{n-j} \le M_1$ при $j = 0,1,\dots,n$.