7④ Найти решение смешанной задачи:

$u_t = \Delta u + J_1(r)\cos 2\varphi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r < \mu_1^{(1)}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $t > 0$,

$u\big|_{t=0} = J_1(r)\sin\varphi$, $r < \mu_1^{(1)}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$,

$u\big|_{r=\mu_1^{(1)}} = 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $t \ge 0$,

где $\mu_1^{(1)}$ - минимальный положительный корень Бесселя $J_1(r)$.

Уроев стр. 152 – 172 (**пример 1** стр. 169 –171, пример 2 стр. 171-172)
Фарлоу. У с ЧП для научных работников и инженеров. Стр. 222 – 232
Тихонов, Самарский со стр. 668

① В силу линейности задачи $u = u_I + u_{II}$, где

$$\begin{cases} (u_I)_t = \Delta u + J_1(r)\cos 2\varphi \\ u_I\big|_{t=0} = 0 \\ u_I\big|_{r=r=\mu_1^{(1)}} = 0 \\ \left|u_I\big|_{r=0}\right| < +\infty \end{cases} \qquad (1)$$

и

$$\begin{cases} (u_{II})_t = \Delta u_{II} \\ u_{II}\big|_{t=0} = J_1(r)\sin\varphi \\ u_{II}\big|_{r=r=\mu_1^{(1)}} = 0 \\ \left|u_{II}\big|_{r=0}\right| < +\infty \end{cases} . \qquad (2)$$

② Решение ищем МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ в виде:

$u_i = T(t)V(r,\varphi)$, $i = I,\ II$.

Тогда $T'V = T\Delta V$.

Разделив на TV, получаем $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{\Delta V}{V} = -\lambda^2$ - постоянная разделения[1 2].

Получаем два уравнения:

❶ $T' = -\lambda^2 T \;\Rightarrow\; T = Ce^{-\lambda^2 t}$

❷ $\Delta V + \lambda^2 V = 0$

Остановимся подробнее на втором уравнении

В полярной системе координат $(x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi)$ $\Delta u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$, поэтому (2) принимает вид:

$$V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r^2}V_{\varphi\varphi} + \lambda^2 V = 0 .$$

Снова используем МРП: $V(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$.

Тогда $R''\Phi + \dfrac{1}{r}R'\Phi + \dfrac{1}{r^2}R\Phi'' + \lambda^2 R\Phi = 0$.

Деля последнее уравнение на $\dfrac{1}{r^2}R\Phi$, получаем:

---

[1] Чтобы функция $T(t)V(r,\varphi)$ была решением ДУвЧП $T'V = T\Delta V$, последнее равенство должно удовлетворяться тождественно, т.е. для всех значений независимых переменных $t > 0,\ r < \mu_1^{(1)},\ 0 \le \varphi \le 2\pi$. Левая часть равенства является функцией только переменного *t*, а правая – только *r* и φ. Фиксируя, например, некоторое значение *t* и меняя φ и/или *r* (или наоборот), получим, что правая и левая части последнего равенства при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение.

[2] Теорема (Уроев стр. с148) Дифференциальный оператор $A = -\Delta$, на линейных многообразиях M_1, M_2 и M_3 функций, *удовлетворяющих граничным условиям соответственно первого рода (Дирихле), второго рода (Неймана) и третьего рода*, Симметричен, причем на линейных многообразиях M_1 и M_3 он положительно определен, а на M_2 - неотрицательно.

$\dfrac{r^2R''+rR'+r^2\lambda^2R}{R}=-\dfrac{\Phi''}{\Phi}=\eta$ - постоянная разделения[3].

Отсюда получаем два уравнения:

$$\Phi''+\eta\Phi=0\,, \tag{3}$$

$$r^2R''+rR'+r^2\lambda^2R-\eta R=0\,. \tag{4}$$

Из гладкости исходной функции u_i, $i=I,\,II$, а, следовательно, из гладкости функции V следует, что $\Phi(\varphi)\in C^2[0;2\pi]$, причем[4] $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$, $\Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$.

$\eta<0$, $\Phi(\varphi)=C_1e^{\sqrt{-\eta}\varphi}+C_2e^{-\sqrt{-\eta}\varphi}$ - периодичности нет.

$\eta=0$, $\Phi(\varphi)=C_1\varphi+C_2$ - периодичность при $C_1=0$, период произволен.

$\eta>0$, $\Phi(\varphi)=C_1\cos\sqrt{\eta}\varphi+C_2\sin\sqrt{\eta}\varphi$ - решение периодично, но нам требуется период 2π. Учтем условия на концах:

$$\begin{cases}\Phi(0)=\Phi(2\pi)\\ \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}C_1=C_1\cos\sqrt{\eta}2\pi+C_2\sin\sqrt{\eta}2\pi\\ \sqrt{\eta}C_2=-\sqrt{\eta}C_1\sin\sqrt{\eta}2\pi+\sqrt{\eta}C_2\cos\sqrt{\eta}2\pi\end{cases}\quad\to$$

$\begin{cases}C_1\left(1-\cos\sqrt{\eta}2\pi\right)-C_2\sin\sqrt{\eta}2\pi=0\\ C_1\sin\sqrt{\eta}2\pi+C_2\left(1-\cos\sqrt{\eta}2\pi\right)=0\end{cases}$ - получили линейную однородную систему относительно C_1 и C_2.

Она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$0=\begin{vmatrix}\left(1-\cos\sqrt{\eta}2\pi\right) & -\sin\sqrt{\eta}2\pi\\ \sin\sqrt{\eta}2\pi & \left(1-\cos\sqrt{\eta}2\pi\right)\end{vmatrix}=\left(1-\cos\sqrt{\eta}2\pi\right)^2+\sin^2\sqrt{\eta}2\pi\;=1-2\cos\sqrt{\eta}2\pi+\cos^2\sqrt{\eta}2\pi+\sin^2\sqrt{\eta}2\pi$$

$$=2-2\cos\sqrt{\eta}2\pi\;=2\left(1-\cos\sqrt{\eta}2\pi\right),$$

то есть $\cos\sqrt{\eta}2\pi=1\Rightarrow\sqrt{\eta}2\pi=2\pi k\Rightarrow\sqrt{\eta}=k$.

Следовательно $\boxed{\eta=n^2}$, $n\in\mathbb{N}$ - собственные значения оператора $-\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bullet$.

Выберем две линейно независимые собственные функции следующим образом:

$\Phi_{n,1}=\cos n\varphi$, $\Phi_{n,2}=\sin n\varphi$.

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi \tag{5}$$

Уравнение (4) $r^2R''+rR'+\left(r^2\lambda^2-n^2\right)R=0$ - так называемое уравнение Бесселя.

Оно имеет два линейно независимых решения:

$R_1(r)=J_n(\lambda r)$ - функция Бесселя **первого** рода n-го порядка,

$R_2(r)=Y_n(\lambda r)$ - функция Бесселя **второго** рода n-го порядка.

Следовательно общее решение этого уравнения представимо в виде $R(r)=C_1J_n(\lambda r)+C_2Y_n(\lambda r)$.

Для определения функций $J_n(\lambda r)$ и $Y_n(\lambda r)$ можно воспользоваться *методом Фробениуса*[5], который позволяет найти $R(r)$ в виде степенных рядов.

$J_\nu(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$ [6] - ограничена в окрестности $x=0$.

---

[3] Чтобы функция $V(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$ была решением ДУ $R''\Phi+\dfrac{1}{r}R'\Phi+\dfrac{1}{r^2}R\Phi''+\lambda^2R\Phi=0$, последнее равенство должно удовлетворяться тождественно, т.е. для всех значений независимых переменных $r<2$ и $0\le\varphi<2\pi$. Левая часть равенства является функцией только переменного r, а правая – только φ. Фиксируя, например, некоторое значение r и меняя φ (или наоборот), получим, что правая и левая части последнего равенства при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение.

[4] При изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $u_i(t,r,\varphi)$, $i=I,\,II$ должна вернуться к исходному значению: $u_i(t,r,\varphi)=u_i(t,r,\varphi+2\pi)$, $i=I,\,II$ (условие периодичности). Отсюда следует, что $V(r,\varphi)=V(r,\varphi+2\pi)$ и $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$, т.е. $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией угла φ с периодом 2π.

[5] См. Тихонов, Самарский. УМФ. Дополнение II, часть I, §1, п. 1

Кроме того, уравнение Бесселя не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе с первыми производными.[7]. Таким образом,

$$R(r) = CJ_n(\lambda r). \tag{6}$$

ГУ $u_i\big|_{r=2} = 0$, $i = I,\ II$ будет выполнено, если $V(2,\varphi) = 0$, т.е. при $R(2) = CJ_n(\lambda 2)$.

Откуда $2\lambda = \mu_k^{(n)}$, где $\mu_k^{(n)}$ - k-й положительный корень уравнения $J_n(\mu) = 0$.

Итак $\lambda_{n,k} = \dfrac{\mu_k^{(n)}}{2}$

$$V_{n,k} = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{2} r\right)\left(A_{n,k}\cos n\varphi + B_{n,k}\sin n\varphi\right)$$

Решение задач (1) ищем в виде $\boxed{u_i = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{2} r\right)\left(\left(T_{n,k}\right)_i \cos n\varphi + \left(\tilde{T}_{n,k}\right)_i \sin n\varphi\right)}$, $i = I,\ II$.

③ Решение ДУвЧП системы (1) согласно МРП ищем в виде

$$u_I \sim \sum_{k=1}^{\infty} T_k^I(t) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}} r\right)\cos 2\varphi \tag{7}$$

---

[6] $\Gamma(s)$ - гамма-функция: $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

[7] 🕮 ✍ **Определение**. (Романко Гл. 6, §2, стр. 175) Определителем Вронского (или сокращенно вронскианом) решений $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \tag{1}$$

называется определитель вида

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots\ \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots\ \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots\ \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

и обозначается $W(x)$ или $W\left[y_1(x),\ldots,y_n(x)\right]$.

🕮 ✍ **Теорема 4**. (Романко Гл. 6, §2, стр. 176) Пусть $W(x)$ - определителем Вронского решений $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ уравнения (1) и пусть $x_0 \in [\alpha,\beta]$. Тогда для всех $x \in [\alpha,\beta]$ справедлива формула Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(\zeta)d\zeta}.$$

🕮 ✍ **Замечание**. (Романко Гл. 6, §2, стр. 176) В случае, когда $n = 2$ и известно частное решение $y_1(x) \neq 0$ на $[\alpha,\beta]$ уравнения (1), то формула Лиувилля-Остроградского позволяет найти решение (1) в квадратурах.

В самом деле, из формулы Лиувилля-Остроградского для решений $y_1(x)$ и $y(x)$ имеем, что

$$y_1 y' - y y_1' = c_1 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(\zeta)d\zeta},$$

где c - постоянная. Разделив это уравнение на $y_1^2(x)$, имеем:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(\zeta)d\zeta}.$$

Откуда получаем, что

$$y(x) = c_1 y_1(x)\int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{\tau} a_1(\zeta)d\zeta}\frac{d\tau}{y_1^2(\tau)} + c_2 y_1(x).$$

✍ Допустим противное: уравнение Бесселя имеет два линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, ограниченные вместе с первыми производными в окрестности нуля.

✍ Т.к. произведение ограниченных функций есть ограниченная функция, сумма ограниченных функций есть ограниченная функция, то $y_1 y_2' - y_2 y_1'$ - ограниченная функция, согласно предположению.

✍ $y_1 y_2' - y_2 y_1' = c_1 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(\zeta)d\zeta} = c_1 e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{\zeta}{\zeta^2}d\zeta} = c_1 e^{-\ln\zeta\big|_{x_0}^{x}} = c_1 e^{-\ln x + \ln x_0} = c_1 \dfrac{e^{\ln x_0}}{e^{\ln x}} = c_1 \dfrac{x_0}{x}$ - эта функция не ограничена в окрестности нуля. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Разложим функцию $J_1(r)$ [8], входящую в правую часть ДУвЧП по системе $\left\{J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$:

$$J_1(r)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}r\right), \qquad (8)$$

где $a_k=\dfrac{\int\limits_0^{\mu_1^{(1)}} J_1(r)J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)rdr}{\int\limits_0^{\mu_1^{(1)}} J_2{}^2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)rdr}$.

Подставляя (7) в ДУвЧП и НУ[9] системы (1) , получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(T_k^I(t)\right)' J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)\cos 2\varphi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k^I(t)\Delta J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)\cos 2\varphi+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)\cos 2\varphi\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k^I(0)J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)\cos 2\varphi=0\end{array}\right.$$

Потребовав почленного выполнения полученных равенств, приходим к ЗАДАЧЕ КОШИ для $T_k^I(t)$

$$\left[\begin{array}{l}\left(T_k^I(t)\right)'=-\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}\right)^2 T_k^I(t)+\alpha_k\\ T_k^I(0)=0\end{array}\right. \qquad (9)$$

Решаем ЗК (9).

$$T_k^I(t)=Ce^{-\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}\right)^2 t}+T_{k\text{ччаст}}^I(t)$$

Частное решение ищем в виде $T_{k\text{ччаст}}^I(t)=A$. Подставляя в ОДУ для $T_k^I(t)$, получаем: $0=-\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}\right)^2 A+\alpha_k$, откуда

$A=\dfrac{\alpha_k}{\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}\right)^2}$ и $T_k^I(t)=Ce^{-\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}\right)^2 t}+\dfrac{\alpha_k}{\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}\right)^2}$. Из НУ $C=-\dfrac{\alpha_k}{\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}\right)^2}$.

Т.о., $T_k^I(t)=\dfrac{\alpha_k}{\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}\right)^2}\left(1-e^{-\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}\right)^2 t}\right)$.

④ Решаем задачу (2). Решение ДУвЧП системы (2) согласно МРП ищем в виде

$$u_{II}\sim\sum_{k=1}^{\infty}T_k^{II}(t)J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)\sin\varphi \qquad (10)$$

Подставляя (10) в ДУвЧП и НУ[10] системы (2) , получаем:

---

[8] См. Тихонов, Самарский. УМФ. Дополнение II, часть I, §2. Всякая дважды дифференцируемая функция $f(r)$, ограниченная при $r=0$ и обращающаяся в нуль при $r=r_0$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд $f(r)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n1)}}{r_0}r\right)$, где

$$A_m=\frac{\int\limits_0^{r_0} f(r)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)rdr}{\|J_n\|^2},\quad \|J_n\|^2=\frac{r_0{}^2}{2}\left[J_n{}'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2.$$

[9] ГУ выполняются автоматически из-за способа построения решения

$$\left[\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k^{II}(t)\right)' J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)\sin\varphi = \sum_{k=1}^{\infty}T_k^{II}(t)\Delta J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)\sin\varphi \\ \sum_{k=1}^{\infty}T_k^{I}(0) J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)\sin\varphi = J_1(r)\sin\varphi\end{array}\right.$$

Потребовав почленного выполнения полученных равенст, приходим к ЗК для $T_k^{II}(t)$

$$\left[\begin{array}{l}\left(T_k^{II}(t)\right)' = -\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{\mu_1^{(1)}}\right)^2 T_k^{II}(t) \\ T_k^{II}(0) = \begin{cases}1, & k=1,\\ 0, & k\neq 1.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (13)$$

$T_k^{II}(t) = \begin{cases}Ce^{-t}, & k=1,\\ 0, & k\neq 1.\end{cases}$. Из НУ $C=1$ и $\underline{T_1^{II}(t) = e^{-t}}$.

$\boxed{u_{II} = e^{-t}J_1(r)\sin\varphi}$

Ответ: $$\boxed{u = e^{-t}J_1(r)\sin\varphi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_0^{\mu_1^{(1)}} J_1(r)J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)rdr}{\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}\right)^2\int_0^{\mu_1^{(1)}} J_2^{\,2}\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)rdr}\left(1 - e^{-\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}\right)^2 t}\right)J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_1^{(1)}}r\right)\cos 2\varphi}$$

[10] ГУ выполняются автоматически из-за способа построения решения