7в④ Решить смешанную задачу

$4u_{tt} = \Delta u + f(r)\cos^2 3\varphi$, $r<2$, $t>0$, $u = u(r,\varphi,t)$;

$u\big|_{t=0} = J_0\left(\dfrac{\mu_{04} r}{2}\right)$, $u_t\big|_{t=0} = g(r)\sin 3\varphi$, $u\big|_{r=2} = 0$, $\left|u\big|_{r=0}\right| < \infty$,

где $f(r)$, $g(r)$ - гладкие на $[0, 2]$ функции, μ_{kj} - *j*-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0,1,2,\dots$, $j = 1,2,3,\dots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Уроев стр. 152 – 172 (**пример 1** стр. 169 –171, пример 2 стр. 171-172)
Фарлоу. У с ЧП для научных работников и инженеров. Стр. 222 – 232
Тихонов, Самарский со стр. 668

① $\cos^2 3\varphi = \dfrac{1+\cos 6\varphi}{2}$.

В силу линейности задачи $u = u_I + u_{II} + u_{III}$, где

$$\begin{cases} 4(u_I)_{tt} = \Delta u_I + \dfrac{1}{2} f(r), \\ u_I\big|_{t=0} = J_0\left(\dfrac{\mu_{04} r}{2}\right), \ u_{I\,t}\big|_{t=0} = 0, \\ u_I\big|_{r=2} = 0, \\ \left|u_I\big|_{r=0}\right| < +\infty; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} 4(u_{II})_t = \Delta u_{II}, \\ u_{II}\big|_{t=0} = 0, \quad u_{II\,t}\big|_{t=0} = g(r)\sin 3\varphi, \\ u_{II}\big|_{r=2} = 0, \\ \left|u_{II}\big|_{r=0}\right| < +\infty \end{cases} \qquad (2)$$

и

$$\begin{cases} 4(u_{III})_t = \Delta u_{III} + \dfrac{1}{2} f(r)\cos 6\varphi, \\ u_{III}\big|_{t=0} = 0, \quad u_{III\,t}\big|_{t=0} = 0, \\ u_{III}\big|_{r=2} = 0, \\ \left|u_{III}\big|_{r=0}\right| < +\infty / \end{cases} . \qquad (3)$$

② Решение ищем МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ в виде:

$u_i = T(t)V(r,\varphi)$, $i = I,\ II,\ III$.

Тогда $4T''V = T\Delta V$.

Разделив на TV, получаем $\dfrac{4T''}{T} = \dfrac{\Delta V}{V} = -\lambda^2$ - постоянная разделения[1] [2].

Получаем два уравнения:

❶ $4T'' = -\lambda^2 T \Rightarrow T = C_1 \cos\dfrac{\lambda t}{2} + C_2 \sin\dfrac{\lambda t}{2}$

❷ $\Delta V + \lambda^2 V = 0$

Остановимся подробнее на втором уравнении

---

[1] Чтобы функция $T(t)V(r,\varphi)$ была решением ДУвЧП $T'V = T\Delta V$, последнее равенство должно удовлетворяться тождественно, т.е. для всех значений независимых переменных $t>0,\ r<\mu_1^{(1)},\ 0\le\varphi\le 2\pi$. Левая часть равенства является функцией только переменного *t*, а правая – только *r* и φ. Фиксируя, например, некоторое значение *t* и меняя φ и/или *r* (или наоборот), получим, что правая и левая части последнего равенства при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение.

[2] Теорема (Уроев стр. с148) Дифференциальный оператор $A = -\Delta$, на линейных многообразиях M_1, M_2 и M_3 функций, *удовлетворяющих граничным условиям соответственно первого рода (Дирихле), второго рода (Неймана) и третьего рода*, Симметричен, причем на линейных многообразиях M_1 и M_3 он положительно определен, а на M_2 - неотрицательно.

В полярной системе координат $\left(x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi\right)$ $\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$, поэтому (2) принимает вид:

$V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r^2}V_{\varphi\varphi} + \lambda^2 V = 0$.

Снова используем МРП: $V(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$.

Тогда $R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' + \lambda^2 R\Phi = 0$.

Деля последнее уравнение на $\frac{1}{r^2}R\Phi$, получаем:

$\frac{r^2R'' + rR' + r^2\lambda^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \eta$ - постоянная разделения[3].

Отсюда получаем два уравнения:

$\Phi'' + \eta\Phi = 0$, (3)

$r^2R'' + rR' + r^2\lambda^2 R - \eta R = 0$. (4)

Из гладкости исходной функции u_i, $i = I, II$, а, следовательно, из гладкости функции V следует, что $\Phi(\varphi) \in C^2[0;2\pi]$, причем[4] $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, $\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$.

$\eta < 0$, $\Phi(\varphi) = C_1 e^{\sqrt{-\eta}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{-\eta}\varphi}$ - периодичности нет.

$\eta = 0$, $\Phi(\varphi) = C_1\varphi + C_2$ - периодичность при $C_1 = 0$, период произволен.

$\eta > 0$, $\Phi(\varphi) = C_1\cos\sqrt{\eta}\varphi + C_2\sin\sqrt{\eta}\varphi$ - решение периодично, но нам требуется период 2π. Учтем условия на концах:

$$\begin{cases}\Phi(0) = \Phi(2\pi)\\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)\end{cases} \rightarrow \begin{cases}C_1 = C_1\cos\sqrt{\eta}2\pi + C_2\sin\sqrt{\eta}2\pi\\ \sqrt{\eta}C_2 = -\sqrt{\eta}C_1\sin\sqrt{\eta}2\pi + \sqrt{\eta}C_2\cos\sqrt{\eta}2\pi\end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases}C_1\left(1-\cos\sqrt{\eta}2\pi\right) - C_2\sin\sqrt{\eta}2\pi = 0\\ C_1\sin\sqrt{\eta}2\pi + C_2\left(1-\cos\sqrt{\eta}2\pi\right) = 0\end{cases}$$ - получили линейную однородную систему относительно C_1 и C_2.

Она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$0 = \begin{vmatrix}\left(1-\cos\sqrt{\eta}2\pi\right) & -\sin\sqrt{\eta}2\pi\\ \sin\sqrt{\eta}2\pi & \left(1-\cos\sqrt{\eta}2\pi\right)\end{vmatrix} = \left(1-\cos\sqrt{\eta}2\pi\right)^2 + \sin^2\sqrt{\eta}2\pi = 1-2\cos\sqrt{\eta}2\pi+\cos^2\sqrt{\eta}2\pi+\sin^2\sqrt{\eta}2\pi$$

$$= 2 - 2\cos\sqrt{\eta}2\pi = 2\left(1-\cos\sqrt{\eta}2\pi\right),$$

то есть $\cos\sqrt{\eta}2\pi = 1 \Rightarrow \sqrt{\eta}2\pi = 2\pi k \Rightarrow \sqrt{\eta} = k$.

Следовательно $\boxed{\eta = n^2}$, $n \in \mathrm{N}$ - собственные значения оператора $-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bullet$.

Выберем две линейно независимые собственные функции следующим образом:

$\Phi_{n,1} = \cos n\varphi$, $\Phi_{n,2} = \sin n\varphi$.

$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi$ (5)

Уравнение (4) $r^2R'' + rR' + \left(r^2\lambda^2 - n^2\right)R = 0$ - так называемое уравнение Бесселя.

Оно имеет два линейно независимых решения:

---

[3] Чтобы функция $V(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ была решением ДУ $R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' + \lambda^2 R\Phi = 0$, последнее равенство должно удовлетворяться тождественно, т.е. для всех значений независимых переменных $r < 2$ и $0 \le \varphi < 2\pi$. Левая часть равенства является функцией только переменного r, а правая – только φ. Фиксируя, например, некоторое значение r и меняя φ (или наоборот), получим, что правая и левая части последнего равенства при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение.

[4] При изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $u_i(t,r,\varphi)$, $i = I, II$ должна вернуться к исходному значению: $u_i(t,r,\varphi) = u_i(t,r,\varphi+2\pi)$, $i = I, II$ (условие периодичности). Отсюда следует, что $V(r,\varphi) = V(r,\varphi+2\pi)$ и $\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$, т.е. $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией угла φ с периодом 2π.

$R_1(r) = J_n(\lambda r)$ - функция Бесселя **первого** рода n-го порядка,

$R_2(r) = Y_n(\lambda r)$ - функция Бесселя **второго** рода n-го порядка.

Следовательно общее решение этого уравнения представимо в виде $R(r) = C_1 J_n(\lambda r) + C_2 Y_n(\lambda r)$.

Для определения функций $J_n(\lambda r)$ и $Y_n(\lambda r)$ можно воспользоваться *методом Фробениуса*[5], который позволяет найти $R(r)$ в виде степенных рядов.

$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$ [6] - ограничена в окрестности $x = 0$.

Кроме того, уравнение Бесселя не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе с первыми производными.[7]. Таким образом,

$$R(r) = CJ_n(\lambda r). \qquad (6)$$

ГУ $u_i\big|_{r=2} = 0$, $i = I,\ II$ будет выполнено, если $V(2,\varphi) = 0$, т.е. при $R(2) = CJ_n(\lambda 2)$.

Откуда $2\lambda = \mu_k^{(n)}$, где $\mu_k^{(n)}$ - k-й положительный корень уравнения $J_n(\mu) = 0$.

---

[5] См. Тихонов, Самарский. УМФ. Дополнение II, часть I, §1, п. 1

[6] $\Gamma(s)$ - гамма-функция: $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

[7] 🕮 ✍ **Определение**. (Романко Гл. 6, §2, стр. 175) Определителем Вронского (или сокращенно вронскианом) решений $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

называется определитель вида

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots\ \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots\ \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots\ \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

и обозначается $W(x)$ или $W[y_1(x),\ldots,y_n(x)]$.

🕮 ✍ **Теорема 4**. (Романко Гл. 6, §2, стр. 176) Пусть $W(x)$ - определителем Вронского решений $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ уравнения (1) и пусть $x_0 \in [\alpha,\beta]$. Тогда для всех $x \in [\alpha,\beta]$ справедлива формула Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(\zeta)d\zeta}.$$

🕮 ✍ **Замечание**. (Романко Гл. 6, §2, стр. 176) В случае, когда $n = 2$ и известно частное решение $y_1(x) \neq 0$ на $[\alpha,\beta]$ уравнения (1), то формула Лиувилля-Остроградского позволяет найти решение (1) в квадратурах.

В самом деле, из формулы Лиувилля-Остроградского для решений $y_1(x)$ и $y(x)$ имеем, что

$$y_1 y' - y y_1' = c_1 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(\zeta)d\zeta},$$

где c - постоянная. Разделив это уравнение на $y_1^2(x)$, имеем:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(\zeta)d\zeta}.$$

Откуда получаем, что

$$y(x) = c_1 y_1(x)\int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{\tau} a_1(\zeta)d\zeta} \frac{d\tau}{y_1^2(\tau)} + c_2 y_1(x).$$

✍ Допустим противное: уравнение Бесселя имеет два линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, ограниченные вместе с первыми производными в окрестности нуля.

✍ Т.к. произведение ограниченных функций есть ограниченная функция, сумма ограниченных функций есть ограниченная функция, то $y_1 y_2' - y_2 y_1'$ - ограниченная функция, согласно предположению.

✍ $y_1 y_2' - y_2 y_1' = c_1 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(\zeta)d\zeta} = c_1 e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{\zeta}{\zeta^2}d\zeta} = c_1 e^{-\ln\zeta|_{x_0}^{x}} = c_1 e^{-\ln x + \ln x_0} = c_1 \frac{e^{\ln x_0}}{e^{\ln x}} = c_1 \frac{x_0}{x}$ - эта функция не ограничена в окрестности нуля. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Итак $\lambda_{n,k} = \frac{\mu_k^{(n)}}{2}$

$$V_{n,k} = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{2} r\right)\left(A_{n,k}\cos n\varphi + B_{n,k}\sin n\varphi\right)$$

Решение задач (1) ищем в виде $\boxed{u_i = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{2} r\right)\left(\left(T_{n,k}\right)_i \cos n\varphi + \left(\widetilde{T}_{n,k}\right)_i \sin n\varphi\right)}$, $i = I,\ II$.

③ Решение ДУвЧП системы (1) согласно МРП ищем в виде

$$u_I \sim \sum_{k=1}^{\infty} T_k^I(t) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right) \tag{7}$$

Разложим функцию $f(r)$[8], входящую в правую часть ДУвЧП по системе $\left\{J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right), \tag{8}$$

где $a_k = \dfrac{\int_0^2 f(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right) r dr}{\int_0^2 J_0{}^2\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right) r dr}$.

Подставляя (7) в ДУвЧП и НУ[9] системы (1), получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k^I(t)\right)'' J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^I(t)\Delta J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right) \\ \sum_{k=1}^{\infty} T_k^I(0) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right) = J_0\left(\frac{\mu_{04} r}{2}\right), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k^I(0)\right)' J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right) = 0 \end{array}\right.$$

Потребовав почленного выполнения полученных равенств, приходим к ЗАДАЧЕ КОШИ для $T_k^I(t)$

$$\left[\begin{array}{l} 4\left(T_k^I(t)\right)'' = -\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right)^2 T_k^I(t) + \frac{\alpha_k}{2} \\ T_k^I(0) = \begin{cases} 0, & k \neq 4 \\ 1, & k = 4 \end{cases}, \quad \left(T_k^I(0)\right)' = 0 \end{array}\right. \tag{9}$$

Решаем ЗК (9).

$$T_k^I(t) = C_1 \cos\frac{\mu_k^{(0)} t}{4} + C_2 \sin\frac{\mu_k^{(0)} t}{4} + \frac{2\alpha_k}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}.$$

Из НУ $k = 4$: $C_1 + \frac{2\alpha_k}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2} = 1$, $C_2 = 0$ и $T_4^I(t) = \left(1 - \frac{2\alpha_4}{\left(\mu_4^{(0)}\right)^2}\right)\cos\frac{\mu_4^{(0)} t}{4} + \frac{2\alpha_4}{\left(\mu_4^{(0)}\right)^2}$;

---

[8] См. Тихонов, Самарский. УМФ. Дополнение II, часть I, §2. Всякая дважды дифференцируемая функция $f(r)$, ограниченная при $r = 0$ и обращающаяся в нуль при $r = r_0$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд $f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n1)}}{r_0} r\right)$, где

$$A_m = \frac{\int_0^{r_0} f(r) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) r dr}{\left\|J_n\right\|^2}, \quad \left\|J_n\right\|^2 = \frac{r_0{}^2}{2}\left[J_n{}'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2.$$

[9] ГУ выполняются автоматически из-за способа построения решения

$$k \neq 4:\ C_1 + \frac{2\alpha_k}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2} = 0\,,\ C_2 = 0 \text{ и } \boxed{T_k^I(t) = \frac{2\alpha_k}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}\left(1 - \cos\frac{\mu_k^{(0)}t}{4}\right)}$$

④ Решаем задачу (2). Решение ДУвЧП системы (2) согласно МРП ищем в виде

$$u_{II} \sim \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{II}(t) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2} r\right)\sin 3\varphi \tag{10}$$

Разложим функцию $g(r)$, входящую в правую часть ДУвЧП по системе $\left\{J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2} r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$:

$$g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2} r\right), \tag{11}$$

где $\beta_k = \dfrac{\int_0^2 g(r) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2} r\right) r dr}{\int_0^2 J_3^{\,2}\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2} r\right) r dr}$.

Подставляя (10) в ДУвЧП и НУ[10] системы (2) , получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k^{II}(t)\right)'' J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2} r\right)\sin 3\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{II}(t)\Delta J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2} r\right)\sin 3\varphi \\ \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{I}(0) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2} r\right)\sin 3\varphi = 0,\ \ \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k^{I}(0)\right)' J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2} r\right)\sin 3\varphi = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2} r\right). \end{array}\right.$$

Потребовав почленного выполнения полученных равенст, приходим к ЗК для $T_k^{II}(t)$

$$\left[\begin{array}{l} 4\left(T_k^{II}(t)\right)'' = -\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2}\right)^2 T_k^{II}(t) \\ T_k^{II}(0) = 0,\ \ \left(T_k^{II}(0)\right)' = \beta_k. \end{array}\right. \tag{12}$$

$T_k^{II}(t) = C_1\cos\frac{\mu_k^{(3)}t}{4} + C_2\sin\frac{\mu_k^{(3)}t}{4}$. Из НУ $C = 1$, $\frac{\mu_k^{(3)}}{4}C_2 = \beta_k$ и $\boxed{T_k^{II}(t) = \frac{4\beta_k}{\mu_k^{(3)}}\sin\frac{\mu_k^{(3)}t}{4}}$.

⑤ Решение ДУвЧП системы (3) согласно МРП ищем в виде

$$u_{III} \sim \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{III}(t) J_6\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2} r\right)\cos 6\varphi \tag{13}$$

Разложим функцию $f(r)$[11], входящую в правую часть ДУвЧП по системе $\left\{J_6\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2} r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k J_6\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2} r\right), \tag{14}$$

---

[10] ГУ выполняются автоматически из-за способа построения решения

[11] См. Тихонов, Самарский. УМФ. Дополнение II, часть I, §2. Всякая дважды дифференцируемая функция $f(r)$, ограниченная при $r = 0$ и обращающаяся в нуль при $r = r_0$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд $f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n1)}}{r_0} r\right)$, где

$$A_m = \frac{\int_0^{r_0} f(r) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) r dr}{\|J_n\|^2},\ \ \|J_n\|^2 = \frac{r_0^{\,2}}{2}\left[J_n{}'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2.$$

где $\chi_k = \dfrac{\int\limits_0^2 f(r) J_6\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2} r\right) r dr}{\int\limits_0^2 J_6{}^2\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2} r\right) r dr}$.

Подставляя (7) в ДУвЧП и НУ[12] системы (1) , получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(T_k^{III}(t)\right)'' J_6\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2} r\right)\cos 6\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k^{III}(t)\Delta J_6\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2} r\right)\cos 6\varphi + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\chi_k J_6\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2} r\right)\cos 6\varphi \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k^{III}(0) J_6\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2} r\right)\cos 6\varphi = 0, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(T_k^{III}(0)\right)' J_6\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2} r\right)\cos 6\varphi = 0 \end{array}\right.$$

Потребовав почленного выполнения полученных равенств, приходим к ЗАДАЧЕ КОШИ для $T_k^{III}(t)$

$$\left[\begin{array}{l} 4\left(T_k^{III}(t)\right)'' = -\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2}\right)^2 T_k^{III}(t) + \frac{\chi_k}{2} \\ T_k^{III}(0) = 0, \quad \left(T_k^{III}(0)\right)' = 0 \end{array}\right. \tag{15}$$

Решаем ЗК (15).

$$T_k^{III}(t) = C_1 \cos\frac{\mu_k^{(6)} t}{4} + C_2 \sin\frac{\mu_k^{(6)} t}{4} + \frac{2\chi_k}{\left(\mu_k^{(6)}\right)^2}.$$

Из НУ: $C_1 + \dfrac{2\alpha_k}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2} = 0$, $C_2 = 0$ и $\boxed{T_k^{III}(t) = \dfrac{2\chi_k}{\left(\mu_k^{(6)}\right)^2}\left(1 - \cos\dfrac{\mu_k^{(6)} t}{4}\right)}$;

Ответ:

$$\boxed{\begin{array}{l} u(r,\varphi,t) = \cos\frac{\mu_4^{(0)} t}{4} J_0\left(\frac{\mu_{04} r}{2}\right) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2\left(1-\cos\frac{\mu_k^{(0)} t}{4}\right)}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}\frac{\int\limits_0^2 f(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right) r dr}{\int\limits_0^2 J_0{}^2\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right) r dr} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right) + \\ \quad + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\mu_k^{(3)}}\frac{\int\limits_0^2 g(r) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2} r\right) r dr}{\int\limits_0^2 J_3{}^2\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2} r\right) r dr}\sin\frac{\mu_k^{(3)} t}{4} J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{2} r\right)\sin 3\varphi + \\ \quad + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\left(\mu_k^{(6)}\right)^2}\frac{\int\limits_0^2 f(r) J_6\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2} r\right) r dr}{\int\limits_0^2 J_6{}^2\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2} r\right) r dr}\left(1-\cos\frac{\mu_k^{(6)} t}{4}\right) J_6\left(\frac{\mu_k^{(6)}}{2} r\right)\cos 6\varphi \end{array}}$$

[12] ГУ выполняются автоматически из-за способа построения решения