Пример 1. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$\int_1^4 \left(\frac{9y^2}{x^2} - \frac{15yy'}{x} + 2(y')^2 - \frac{4y}{x\sqrt{x}} \right) dx, \ y(1) = 2, \ y(4) = -5.$$

① Составляем уравнение Эйлера $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$:

$$F(x, y, y') = \frac{9y^2}{x^2} - \frac{15yy'}{x} + 2(y')^2 - \frac{4y}{x\sqrt{x}},$$

$$F'_y = \frac{18y}{x^2} - \frac{15y'}{x} - \frac{4}{x\sqrt{x}},$$

$$F'_{y'} = -\frac{15y}{x} + 4y',$$

$$\frac{d}{dx} F'_{y'} = -\frac{15y'}{x} + \frac{15y}{x^2} + 4y''.$$

Уравнение Эйлера (2.2) имеет вид

$$\frac{18y}{x^2} - \frac{15y'}{x} - \frac{4}{x\sqrt{x}} + \frac{15y'}{x} - \frac{15y}{x^2} - 4y'' = 0$$

или

$$4x^2 y'' - 3y = -4\sqrt{x} \qquad (1)$$

Это уравнение Эйлера. Для его решения применяем стандартный алгоритм:

1. Решения однородного линейного уравнения ищем в виде $y = x^{\lambda}$.

Характеристическое уравнение $4\lambda(\lambda - 1) - 3 = 0$ или $4\lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0$.

$$(2\lambda)^2 - 2(2\lambda) - 3 = 0, \ (2\lambda - 3)(2\lambda + 1) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}$.

Соответствующее общее решение однородного уравнения $y_o = C_1 x^{-\frac{1}{2}} + C_2 x^{\frac{3}{2}}$.

2. Частное решение (случай нерезонансный) ищем в виде $y_ч = a\sqrt{x}$.

$y'_ч = \frac{a}{2\sqrt{x}}$, $y''_ч = -\frac{a}{4x\sqrt{x}}$. Подставляя $y_ч$, $y'_ч$, $y''_ч$ в неоднородное уравнение Эйлера, получаем $-\frac{4x^2}{4x\sqrt{x}} - 3a\sqrt{x} = -4\sqrt{x}$, или $-4a = -4$, т.е. $a = 1$, и $y_ч = \sqrt{x}$.

3. Общее решение неоднородного уравнения Эйлера (экстремаль) $y = \dfrac{C_1}{\sqrt{x}} + C_2 x\sqrt{x} + \sqrt{x}$.

Постоянные C_1 и C_2 находим из граничных условий

$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 2, \\ \dfrac{C_1}{2} + 8C_2 + 2 = -5; \end{cases}$ или $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 16C_2 = -14; \end{cases}$ откуда получаем $15C_2 = -15$, т.е. $C_2 = -1$,

$C_1 = 2$.

Стационарная точка (допустимая экстремаль) $\hat{y} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{x} + \sqrt{x}$.

4. Исследование на экстремум.

Пусть $h \in C^1[1;4]$, $h(1) = h(4) = 0$. Рассмотрим $\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y})$. Поскольку уравнение Эйлера превращается в верное равенство на рассматриваемой кривой $\hat{y}$, то линейная по h часть приращения функционала равна нулю $(\delta J(\hat{y}) = 0)$. В этом можно при желании убедиться непосредственно, используя прием интегрирования по частям, граничные условия и уравнение Эйлера (на экстремали оно обращается в нуль).

Следовательно,

$$\Delta J = \int_1^4 \left(\frac{9h^2}{x^2} - \frac{15hh'}{x} + 2(h')^2 \right) dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая равенства $h(1) = h(4) = 0$, находим

$$\int_1^4 \left(-\frac{15hh'}{x} \right) dx = \int_1^4 \left(-\frac{15}{2x} \right) dh^2 = -\frac{15h^2}{2x}\bigg|_1^4 + \int_1^4 \left(-\frac{15h^2}{2x^2} \right) dx = = -\int_1^4 \frac{15h^2}{2x^2}\, dx.$$

Таким образом,

$\Delta J = \displaystyle\int_1^4 \left(\frac{9h^2}{x^2} - \frac{15h^2}{2x^2} + 2(h')^2 \right) dx = \int_1^4 \left(\frac{3h^2}{2x^2} + 2(h')^2 \right) dx \ge 0$, т.е. имеет место слабый локальный минимум. ❶