Пример 1. (2015/16-В62) Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$\int_0^{\pi/2}\left((y')^2-25y^2+58ye^{2x}\right)dx,\ y(0)=1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\pi}.$$

② Составляем уравнение Эйлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$:

$$F(x,y,y')=(y')^2-25y^2+58ye^{2x},$$

$$F'_y=-50y+58e^{2x},$$

$$F'_{y'}=2y',$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=2y''.$$

Уравнение Эйлера (2.2) имеет вид

$$-50y+58e^{2x}-2y''=0$$

или

$$y''+25y=29e^{2x} \qquad (1)$$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Для его решения применяем стандартный алгоритм:

1. Решения однородного линейного уравнения ищем в виде $y=e^{\lambda t}$.

   Характеристическое уравнение $\lambda^2+25=0$.

   Его корни $\lambda_{1,\,2}=\pm 5i$.

   Соответствующее общее решение однородного уравнения $y_o=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$.

2. Частное решение (случай нерезонансный) ищем в виде $y_ч=ae^{2x}$.

   $y'_ч=2ae^{2x}$, $y''_ч=4ae^{2x}$. Подставляя $y_ч$, $y'_ч$, $y''_ч$ в неоднородное уравнение Эйлера, получаем $4ae^{2x}+25ae^{2x}=29e^{2x}$, или $29a=29$, т.е. $a=1$, и $y_ч=e^{2x}$.

3. Общее решение неоднородного уравнения Эйлера (экстремаль) $y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x+e^{2x}$.

   Постоянные C_1 и C_2 находим из граничных условий

$\begin{cases} C_1 + 1 = 1, \\ C_1 \cos\dfrac{5\pi}{2} + C_2 \sin\dfrac{5\pi}{2} + e^{\pi} = e^{\pi}; \end{cases}$ или $\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin\dfrac{5\pi}{2} = 0; \end{cases}$ откуда получаем $C_2 = 0$, т.е. $C_2 = 0$, $C_1 = 0$.

Стационарная точка (допустимая экстремаль) $\hat{y} = e^{2x}$.

4. Исследование на экстремум.

Пусть $h \in C^1\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $h(0) = h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Рассмотрим $\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y})$. Поскольку уравнение Эйлера превращается в верное равенство на рассматриваемой кривой $\hat{y}$, то линейная по h часть приращения функционала равна нулю $(\delta J(\hat{y}) = 0)$. В этом можно при желании убедиться непосредственно, используя прием интегрирования по частям, граничные условия и уравнение Эйлера (на экстремали оно обращается в нуль).

Следовательно,

$$\Delta J = \int_1^{\pi/2} \left((h')^2 - 25h^2\right) dx.$$

Полагая $h = \varepsilon \sin 2kx$, где $k \in \mathbb{N}$, при этом $\|h\|_{C^1} < \varepsilon(1 + 2k)$, получаем

$$\Delta J = \varepsilon^2 \int_1^{\pi/2} \left(4k^2 \cos^2 2kx - 25 \sin^2 2kx\right) dx = \varepsilon^2 \int_1^{\pi/2} \left(4k^2 \frac{\cos 4kx + 1}{2} + 25 \frac{\cos 4kx - 1}{2}\right) dx =$$

$$= \varepsilon^2 \int_1^{\pi/2} \left(\frac{4k^2 + 25}{2} \cos 4kx + \frac{4k^2 - 25}{2}\right) dx = \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\int_1^{\pi/2} (4k^2 + 25) \cos 4kx dx + \int_1^{\pi/2} (4k^2 - 25) dx\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2}\left[(4k^2 + 25) \frac{\sin 4kx}{4k}\Bigg|_0^{\pi/2} + (4k^2 - 25)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\varepsilon^2 \pi}{4}(4k^2 - 25),$$

т.е. $\Delta J > 0$ при $k > 2$ и $\Delta J < 0$ при $k \le 2$.

Т.о. нет ни минимума, ни максимума.❷