Пример 6.3. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал, определив знак приращения $J(y)=\int\limits_1^{e^2}\left(x(y')^2+\frac{1}{x}y^2-2y'-2\frac{\ln x}{x}y\right)dx$, $y(1)=0$.

③ Задача со свободным концом. Составляем уравнение Эйлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$:

$$F(x,y,y')=x(y')^2+\frac{1}{x}y^2-2y'-2\frac{\ln x}{x}y,$$

$$F'_y=\frac{2}{x}y-2\frac{\ln x}{x},\ F'_{y'}=2xy'-2,\ \frac{d}{dx}F'_{y'}=2y'+2xy''.$$

Уравнение Эйлера (2.2) имеет вид

$$\frac{2}{x}y-2\frac{\ln x}{x}-2y'-2xy''=0$$

или

$$x^2y''+xy'-y=-\ln x. \qquad (1)$$

Это уравнение Эйлера. Для его решения применяем стандартный алгоритм:

1. Заменой $x=e^t$ $(t=\ln x)$ сведем (7.2.1) к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$y'_x=y'_t\cdot t'_x=\frac{y'_t}{x},\ y''_{xx}=\left(\frac{y'_t}{x}\right)'_x=-\frac{y'_t}{x^2}+\frac{(y'_t)'_x}{x}=\frac{y''_{tt}\cdot t'_x}{x}-\frac{y'_t}{x^2}=\frac{y''_{tt}-y'_t}{x^2}$$

и

$$y''_{tt}-y'_t+y'_t-y=-t$$

или

$$y''_{tt}-y=-t. \qquad (2)$$

2. Решения однородного линейного уравнения (8.2.2) ищем в виде $y=e^{\lambda t}$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2-1=0$. Его корни $\lambda_{1,2}=\pm 1$.

Соответствующее решение однородного уравнения $y_o=C_1e^t+C_2e^{-t}$.

3. Частное решение (случай нерезонансный) ищем в виде $y_ч=at+b$.

Подставляя $y_ч$ в неоднородное уравнение Эйлера, получаем $-at-b=-t$, т.е. $a=1$, $b=0$, и $y_ч=t$.

4. Общее решение неоднородного уравнения Эйлера (экстремаль) $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} + t$ или, возвращаясь к независимой переменной x:

$$y = C_1 \frac{1}{x} + C_2 x + \ln x .$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из следующих граничных условий:

$y(1) = 0$, $F'_{y'}\big|_{x=e^2} = 0$.

Таким образом, $F'_{y'}\big|_{x=e^2} = (2xy' - 2)\big|_{x=e^2} = 2e^2\left(-C_1 e^{-4} + C_2 + e^{-2}\right) - 2 = 0$ и

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -2e^{-2}C_1 + 2e^2 C_2 + 2 - 2 = 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 + e^4 C_2 = 0; \end{cases}$ откуда получаем $(1 + e^2)C_2 = 0$, т.е. $C_2 = 0$, $C_1 = 0$.

Стационарная точка (допустимая экстремаль) $\hat{y} = \ln x$.

5. Исследование на экстремум.

Пусть $h \in C^1[1, e^2]$, $h(1) = 0$ и $F'_{y'}\big|_{x=e^2} = 0$. Рассмотрим $\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y})$. Поскольку уравнение Эйлера превращается в верное равенство на рассматриваемой кривой $\hat{y}$, то линейная по h часть приращения функционала равна нулю $(\delta J(\hat{y}) = 0)$. В этом можно при желании убедиться непосредственно, используя прием интегрирования по частям, граничные условия и уравнение Эйлера. Следовательно, $\Delta J = \int\limits_1^3 \left(x(h')^2 + \frac{1}{x} h^2 \right) dx \geq 0$ $(x \in [1, e^2] \to x > 0)$, т.е. имеет место слабый локальный минимум. ❸